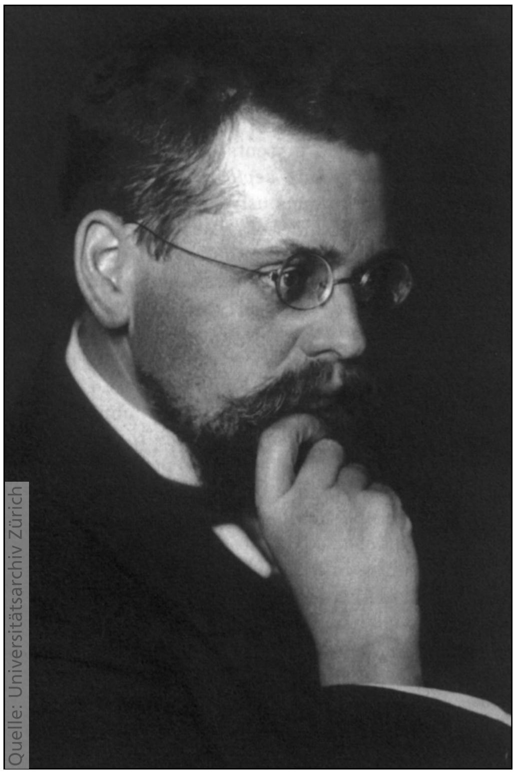
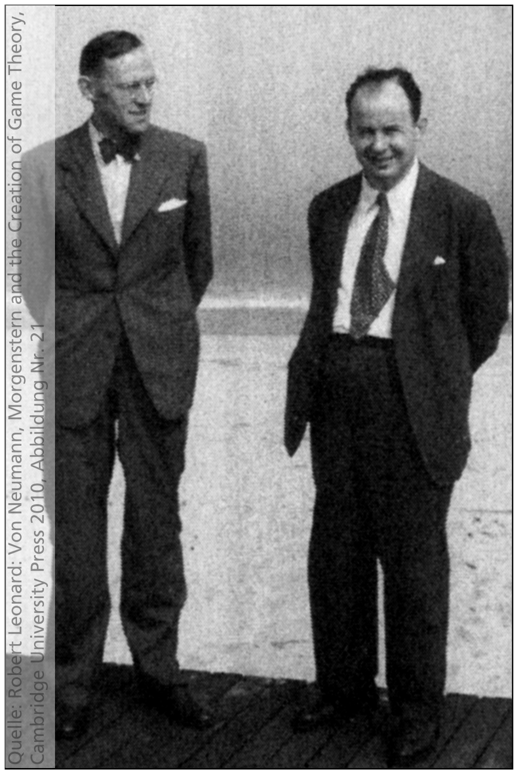




Pioniere der Spieltheorie:
Ernst Zermelo (links), Oskar Morgenstern und John von Neumann (rechtes Bild)

SCHACH AUS SPIELTHEORETISCHER SICHT

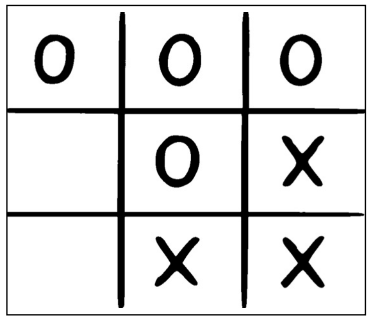
VON JÖRG BEWERSDORFF

Von den vielfältigen Bezügen zwischen Schach und Mathematik sind diejenigen, die das eigentliche Spiel, seine Regeln und das Ziel, gute Züge zu finden, betreffen, auf mathematischer Seite dem Teilgebiet der Spieltheorie zuzuordnen.

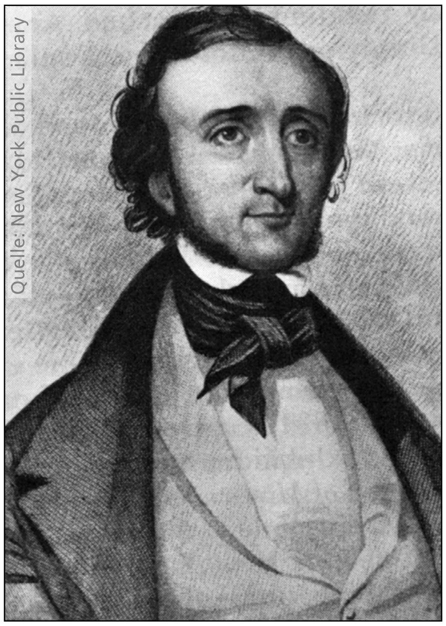
Als Geburtsjahr der Spieltheorie gilt das Jahr 1944, als der geniale Mathematiker österreich-ungarischer Herkunft John von Neumann (1903–1957) zusammen mit dem Ökonomen Oskar Morgenstern (1902–1977) die monumentale Monographie *Theory of games and economic behavior* veröffentlichte. Innerhalb der Spieltheorie dient ein formales Modell eines Spiels dazu, interaktive Entscheidungsprozesse präzise zu beschreiben, egal ob in der Ökonomie oder in einem richtigen Gesellschaftsspiel. Dazu werden die Regeln, gemäß denen sich die beteiligten Akteure entscheiden müssen, durch entsprechende mathematische Objekte modelliert. Ziel der Spieltheorie ist es, rationales Entscheidungsverhalten zu charakterisieren, zu untersuchen und in konkreten Fällen zu berechnen.

ZERMELOS SATZ

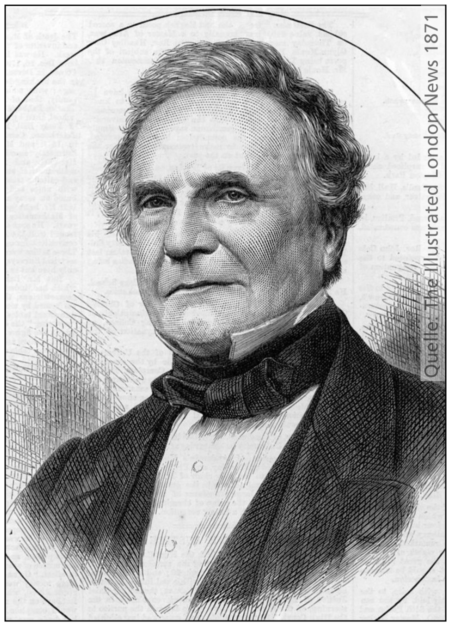
Schon vor der eigentlichen Geburt der Spieltheorie gab es einzelne, isolierte Untersuchungen zu Fragestellungen, die heute der Spieltheorie zugerechnet werden.[1] Hier zu nennen ist insbesondere eine theoretische Untersuchung *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* aus dem Jahr 1912 von Ernst Zermelo (1871–1953).[2] Der in dieser Publikation formulierte und bewiesene Satz besagt, dass Schach in rein qualitativer Hinsicht genauso determiniert ist wie das primitive Tic-Tac-Toe-Spiel



(Drei in einer Reihe): Jede Position, selbst die Anfangsstellung, hat nämlich *im Prinzip* den deterministischen Charakter, wie man es von Schachproblemen her



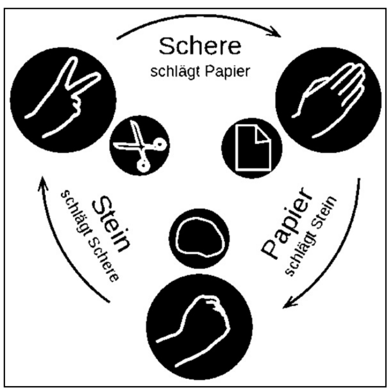
Edgar Allan Poe



Charles Babbage

kennt. Konkret hat entweder Weiß eine zwingende Gewinnstrategie, oder für Schwarz existiert eine solche zwingende Gewinnstrategie, oder beide Kontrahenten können ihren Verlust verhindern. Bezogen auf das beste Spielresultat, das Weiß sicher erzwingen kann und das bei korrektem Gegenspiel nicht übertroffen wird, gehört also zu jeder Position eine genau bestimmte Gewinnhöhe, und zwar 1, ½ oder 0. Spielen beide Kontrahenten optimal, ergibt sich *genau* dieses Spielresultat. Dazu gibt es für den Spieler, der am Zug ist, stets mindestens einen *besten* Zug, der den höchsten Gewinn, den der ziehende Spieler erzwingen kann, nicht verringert. Psychologie mag in der Praxis eines Schachturniers eine Rolle spielen,[3] auf theoretischem Niveau ist sie irrelevant, wie inzwischen auch der überragende Erfolg von Schachprogrammen zeigt.

Zermelos mathematischer Satz hilft weder beim praktischen Spiel, noch erlaubt er es, konkrete Aussagen für die meisten Schachpositionen zu machen. Diesbezüglich hat bereits Zermelo darauf hingewiesen, dass insbesondere die Beantwortung der Frage, „ob die Anfangsposition … bereits für eine der spielenden Parteien eine ‚Gewinnstellung' ist", offen sei.[4] Beantwortet werden konnte diese Frage inzwischen übrigens für das Mühle-Spiel, das man als An- oder Nachziehender nur nach fehlerhaftem Spiel verliert.[5] Offenkundig, wenn auch nur in Bezug auf das Ergebnis und nicht im Hinblick auf die dafür anzuwendende Strategie, ist ebenfalls der Fall von zwei Schachpartien mit wechselndem Anzugsrecht. Unabhängig davon, ob die beiden Partien nacheinander oder simultan gespielt werden, gewährleistet die Symmetrie den theoretischen Ausgleich, womit der gravierende Unterschied zu einem Spiel wie Schere-Stein-Papier deutlich wird: Bei



Schere-Stein-Papier kann nämlich keiner der beiden Spieler dadurch, dass er sich für einen bestimmten Zug entscheidet, seinen Verlust verhindern. Alles hängt davon ab, dass man die Entscheidung des Gegners richtig einschätzt, ob mit Psychologie oder wie auch immer. An ein solches Phänomen dürfte auch Edgar Allan Poe (1809-1849) gedacht haben, als er 1836 anlässlich einer Präsentation des berühmten, 1769 vom Baron von Kempelen (1734-1804) konstruierten Schachautomaten versuchte nachzuweisen, dass dieser Automat in der Gestalt eines schachspielenden Türken auf einer Täuschung beruhen müsse. Nachdem Poe den Rechenautomaten des englischen Mathematikers Charles Babbage (1792–1871) gewürdigt hat, vergleicht Poe ihn mit dem Schachautomaten: „Arithmetische oder algebraische Berechnungen sind ihrem Wesen nach bestimmt. Wenn gewisse Daten gegeben werden, müssen gewisse Resultate notwendig und unausbleiblich folgen. [...] Da dies der Fall ist, können wir uns ohne Schwierigkeit die Möglichkeit vorstellen, eine Mechanik zu verfertigen, die von den Daten der Fragen ausgehend richtig und unabweislich zu der Lösung vorschreitet, da dies Vorschreiten, wie verwickelt es auch immer sein mag, doch nach ganz bestimmtem Plane vor sich geht. Bei dem Schachspieler liegt die Sache durchaus anders. Bei ihm ist der Fortschritt in keiner Weise bestimmt. Kein einziger Zug im Schachspiel folgt notwendig aus einem anderen. Wir können aus keiner Stellung der Figuren zu einer Periode des Spiels ihre Stellung zu einer anderen voraussagen. [...] In genauem Verhältnis zu dem Fortschreiten des Schachspiels steht die Ungewissheit jedes folgenden Zuges. Wenn ein paar Züge gemacht worden sind, so ist kein weiterer Schritt mehr sicher. Verschiedene Zuschauer des Spieles würden verschiedene Züge anraten. Es

Wilhelm Steinitz

hängt also alles vom veränderlichen Urteil der Spieler ab. Wenn wir nun annehmen (was nicht anzunehmen ist), dass die Züge des automatischen Schachspielers in sich selbst bestimmt wären, so würden sie doch durch den nicht zu bestimmenden Willen des Gegenspielers unterbrochen und in Unordnung gebracht werden. Es besteht also gar keine Analogie zwischen den Operationen des Schachspielers und denen der Rechenmaschine des Herrn Babbage.“[6]

Natürlich wissen wir heute, dass Schachprogramme sehr wohl im Stande sind, gute Züge zu *berechnen*. Dies funktioniert, weil beim Schach Positionen und folglich auch Züge absolut untereinander vergleichbar sind, also nicht nur relativ zu einer Gegenstrategie wie bei Papier-Stein-Schere. Die Ursache dafür ist, dass Schach ein Spiel mit *perfekter Information* ist, das heißt, beide Spieler sind stets übereinstimmend über das gesamte bisherige Spielgeschehen und damit die aktuelle Spielsituation informiert. Dadurch kann ein ziehender Spieler immer die möglichen Wirkungen einer aktuell für ihn zur Auswahl stehenden Zugentscheidung objektiv, das heißt unabhängig vom individuellen Informationsstand und Blickwinkel, abwägen. Dabei richtet der Ziehende seine Zugentscheidungen am eigenen Interesse aus und unterstellt diejenigen Gegenzüge, die für ihn am ungünstigsten sind. Aufgrund des beidseits übereinstimmenden Informationsstandes und der diametral gegenläufigen Interessen erhält man auf diese Weise aus beiden Perspektiven die gleiche Einschätzung des weiteren Spielverlaufs. Hingegen würde der analoge Ansatz bei Spielen mit gleichzeitigen Zügen wie Schere-Stein-Papier oder exklusiven Informationen wie bei Kartenspielen abhängig vom subjektiven Informationsstand zu unterschiedlichen Einschätzungen des weiteren Spielverlaufs führen.

Trotz seines argumentativen Fehlers sind Poes Überlegungen bemerkenswert. Aber zu welchem Zeitpunkt reifte die Erkenntnis darüber, dass Positionen und Züge beim Schach objektiv bewertet werden können?

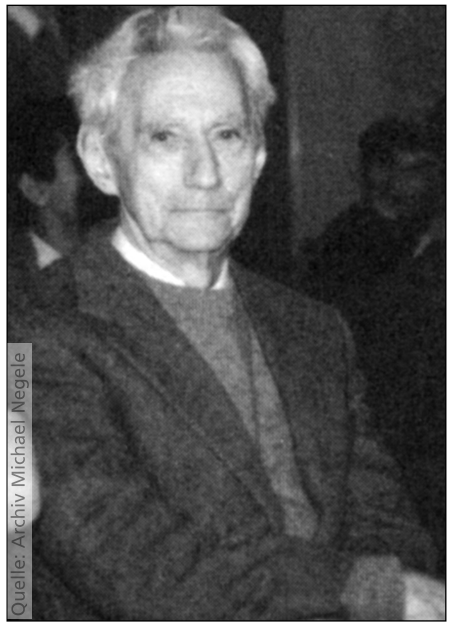
Der Mathematiker Wilhelm Ahrens (1872–1927) geht in einem bereits 1901 erschienenen, populärwissenschaftlichen Buch über Mathematik und Spiele implizit – und letztlich scheinbar selbstverständlich – von einem Sachverhalt aus, welcher der Aussage von Zermelos Satz entspricht. In seinen konkreten Ausführungen beschränkt sich Ahrens allerdings darauf, dass „eine abschließende, alle nur möglichen Fälle umfassende Theorie kaum denkbar ist und für das Schach z. B. nicht im geringsten vorliegt, auch schwerlich jemals gewonnen werden wird, wir meinen eine Theorie, welche für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und welche etwa das Resultat ergeben würde, dass der Anziehende stets siegen muss oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie – auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners – stets unentschieden machen kann.“[7]

Auch wenn Ahrens nur zwei der drei theoretischen Möglichkeiten anspricht – ein Zugzwang in der Anfangsstellung würde jeder Erfahrung widersprechen –, so wird doch die übergangslose Alternative im Sinne eines Entweder-Oder sehr deutlich. In Bezug auf seine Einschätzung, dass die Anfangsposition ausgeglichen ist, konnte sich Ahrens auf bedeutende Schachspieler seiner Zeit berufen, wobei Wilhelm Steinitz (1836–1900) in dieser Hinsicht als Pionier hervorzuheben ist. Steinitz hatte in seinem 1889 erschienenem Buch *The modern chess instructor* ausgeführt, dass die Anfangsstellung ein Gleichgewicht darstelle, sodass man nur nach einem fehlerhaften Zug verlieren würde.[8]

Diese Ansicht lässt sich auf Basis von Zermelos Satz dahingehend verallgemeinern, dass jeder nicht fehlerhafte Zug ein *bester* Zug ist, charakterisiert dadurch, dass der Ziehende keine Einbuße erleidet im Hinblick auf den höchsten Gewinn, den er erzwingen kann.

Soweit die Schachtheorie durch Schachmeister – und nicht durch Mathematiker wie Ahrens und Zermelo – formuliert wurde, konnte die Turnierpraxis natürlich nicht unberücksichtigt bleiben. Und so finden wir selbst später bei Emanuel Lasker (1868–1941), der mit seinem Mathematikerkollegen Zermelo in Kontakt stand[9] und dessen Satz gekannt haben dürfte: „Wenn das Problem des Schachmatts lösbar wäre, so mußte es, sollte man glauben, nach so langer Zeit so vieler und so ernster Bemühungen gelöst sein. Und dennoch war man so weit entfernt wie je, ja, weiter denn je. Daraus schloß Steinitz, dass die Anfangsstellung im Gleichgewicht sein müsse. Ein Schluß aus Erfahrung und daher nicht so sicher wie 2 + 2 = 4. Er ist nicht einmal ausgedrückt, denn im genauen Gleichgewichte kann die Anfangsstellung kaum sein, da das Recht des Anzugs einen Unterschied zwischen Weiß und Schwarz hervorbringt, einen Unterschied, der wohl nicht ganz unwesentlich sein dürfte.“[10] Dazu ist anzumerken, dass nach Zermelos Satz solche „nicht ganz unwesentlichen Unterschiede“ theoretisch nur in Form sehr wesentlicher Unterschiede möglich sind: Sofern Schach nicht ausgeglichen ist, kann einer der beiden Spieler einen Gewinn erzwingen. Feinere Differenzierungen, die im praktischen Spiel selbstverständlich eine wichtige Rolle spielen,

Alan Turing



Claude Elwood Shannon

ergeben sich „nur“ in Bezug auf die Quantität entsprechender Zugfolgen und die dadurch bedingte Schwierigkeit, demgemäße Strategien zu finden. Dies wäre eine Erklärung dafür, dass in Turnierpartien etwa 54% der erreichbaren Punkte durch Weiß erzielt werden.[11]

SCHACHPROGRAMME

Zermelos Beweis gründet auf einer formalen Charakterisierung der Menge aller Positionen, von denen ausgehend Weiß in höchstens einer vorgegebenen Zahl von (Halb-)Zügen ein Matt erzwingen kann. Durch Vereinigung von allen solchen Mengen und der analogen Konstruktion für Schwarz gelangt Zermelo schließlich zur Aussage seines Satzes. Das Beweisprinzip wird noch heute bei der Erstellung von Endspieldatenbanken verwendet, die inzwischen für jede Position mit bis zu sieben Steinen die Information beinhalten, ob und in wie vielen Zügen einer der beiden Spieler ein Matt erzwingen kann.

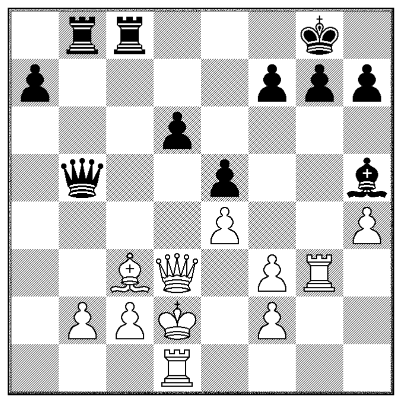
Zermelos Satz liefert auch die Grundlage für die Schachprogrammierung. Allerdings werden, da Zugfolgen aufgrund einer nicht zu bewältigenden Komplexität nicht bis zum Spielende analysiert werden können, die Gewinnaussichten am Ende einer untersuchten Zugfolge abgeschätzt, wozu diverse Formeln existieren, die insbesondere Material und positionelle Muster berücksichtigen. Auf diese Weise wird die Suche nach demjenigen Zug, der auf dieser Grundlage am besten erscheint, durch einen Optimierungsprozess gefunden, bei dem sich Zug für Zug Maximierung und Minimierung abwechseln.

Die für die weitere Entwicklung maßgeblichen Pioniere der Schachprogrammierung waren der Amerikaner Claude Elwood Shannon (1916–2001) und der Engländer Alan Turing (1912–1954). Ebenfalls zu nennen ist der deutsche Pionier universell progammierbarer Rechenmaschinen Konrad Zuse (1910–1995), der in seiner Schrift *Plankalkül* 1945 bedeutende Überlegungen zur Schachprogrammierung anstellte. Noch ohne Verwendung eines Computers wurde bereits 1952 die erste Partie auf Basis eines zuvor von Turing ersonnenen Algorithmus gespielt, mit dem die Züge für Weiß berechnet wurden. Dabei bedachte Turing bereits das Problem, dass ein Abbruch der untersuchten Zugfolgen nur bei einer genügenden „Ruhe“ und damit insbesondere nicht mitten in einem Schlagabtausch durchgeführt werden darf. Dazu wurde in solchen Fällen die standardmäßige Suchtiefe von nur zwei (Halb-)Zügen erhöht. Trotzdem verlor Turings Algorithmus gegen den mittelmäßigen Gegner, weil er gierig einen vergifteten Bauern schlug, ohne den mittels Fesselung dann unvermeidbaren, aber außerhalb des Suchhorizonts liegenden Verlust der eigenen Dame zu berücksichtigen:

TURINGS ALGORITHMUS

ALICK GLENNIE

Manchester 1952



Weiß zog Dxd6, worauf Schwarz mit Td8 die Dame gewann.

Bemerkenswert ist, dass es noch bis 1958 dauerte, bis eine wesentliche, eigentlich jedem Schachspieler vertraute Technik formalisiert wurde, mit der die Analyse von Zugfolgen ohne jede Qualitätseinbuße entscheidend vereinfacht werden konnte. Es handelt sich um die sogenannten *Alpha-Beta-Cutoffs*. Dabei werden Züge, zu denen bereits eine Widerlegung durch einen gegnerischen Zug bekannt ist, nicht mehr weiter untersucht. Schließlich spielt es keine Rolle, ob es noch „vernichtendere“ Widerlegungen gibt oder nicht. Weitere heuristische Erweiterungen ebneten den Weg bis zum ersten Matchsieg eines Schachprogrammes über den amtierenden

Weltmeister Garri Kasparow im Jahr 1997 und weiteren Erfolgen.

KOMPLEXITÄTSTHEORIE

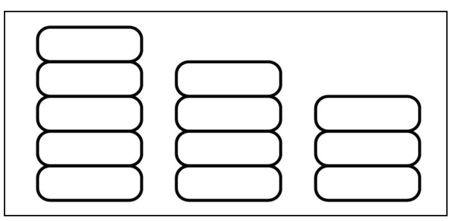
Ein in Bezug auf das Schachspiel wenig praxisnahes Resultat wurde im Bereich der Komplexitätstheorie bewiesen. Dort werden Ja-Nein-Entscheidungsprobleme daraufhin untersucht, wie stark selbst beim effizientesten Algorithmus die Ressourcen Rechenzeit und Speicherbedarf wachsen können, wenn die Inputgröße ansteigt. Bei Brettspielen wie Go, Gobang, Hex oder Reversi sind solche Vergrößerungen der Inputgröße naheliegend, da diese Spiele ohne weiteres auch auf größeren Spielbrettern gespielt werden könnten. Bei Schach bedarf es dazu allerdings hypothetischer Erweiterungen der Spielregeln. Dafür konnte dann 1981 nachgewiesen werden, dass das Entscheidungsproblem, ob Weiß einen Sieg erzwingen kann, zu den schwierigsten Problemen der Klasse EXPTIME gehört. Das heißt, dass die Rechenzeit für eine algorithmisch berechnete Entscheidung bei wachsenden Spielbrettern exponentiell mit der Feldgröße wächst, womit solche Entscheidungen nur für kleine Inputlängen realistisch berechenbar sind. Zum Nachweis wurde zu einem beliebigen Entscheidungsproblem dieser Klasse, ausgehend von einem Computerprogramm, das für jeden Input die Entscheidung berechnet, eine Transformation konstruiert. Dabei wird jeder Input des ursprünglichen Entscheidungsproblems in eine riesige, aus Bauern und Läufern bestehende Schachposition transformiert, deren Gewinncharakter die ursprüngliche Ja-Nein-Entscheidung widerspiegelt. Die Analyse dieser Schachpositionen ist damit mindestens so schwer wie das ursprüngliche Entscheidungsproblem.

KOMBINATORISCHE SPIELTHEORIE

Die Kombinatorische Spieltheorie ist eine von der eigentlichen Spieltheorie völlig unabhängige Teildisziplin der reinen Mathematik, die zu Beginn der 1970er-

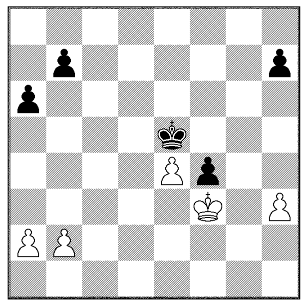
Emanuel Lasker

Jahre insbesondere durch den Mathematiker John Horton Conway (1937-) entwickelt wurde. Untersucht werden zufallsfreie Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information und abwechselndem Zugrecht, die man dann verliert, wenn man keinen Zug mehr machen kann. Dabei ist die Gewinnregel längst nicht so ungewöhnlich, wie sie einem Schachspieler erscheinen muss, der Patt als eine Form des Unentschiedens kennt. In den Augen Conways handelt es sich nämlich um „eine natürliche Konvention, denn üblicherweise betrachten wir uns schon als Verlierer, wenn wir keinen guten Zug mehr machen können; umso eher sollten wir verlieren, wenn wir überhaupt keinen Zug mehr machen können!“[12] Bekanntestes Beispiel für ein Spiel, das die Voraussetzungen der Kombinatorischen Spieltheorie erfüllt, ist das Nim-Spiel, ein einfaches Spiel,[13] für das

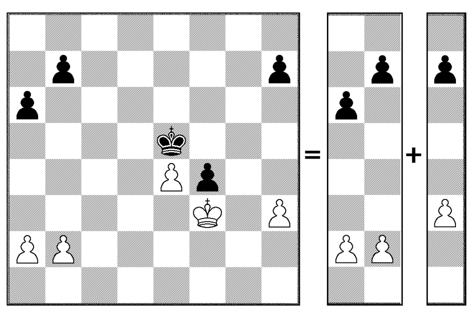


Charles Bouton 1901 eine Gewinnformel veröffentlichte und mit dessen Verallgemeinerungen sich auch Emanuel Lasker in seinem 1931 erschienenem Buch *Brettspiele der Völker* beschäftigt hat (*s. auch S. 14 ff*).

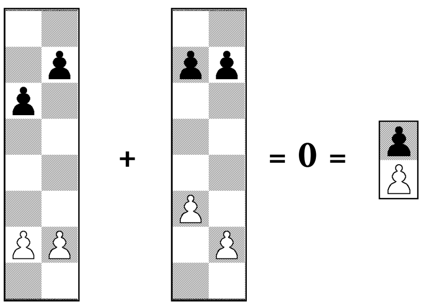
In der Kombinatorischen Spieltheorie werden Positionen immer simultan mit beiderlei Zugrecht untersucht. Ihre eigentliche Stärke entfaltet die Kombinatorische Spieltheorie bei solchen Spielen, bei denen wie beim Nim aus mehreren Positionen durch Nebeneinanderlegen neue Positionen entstehen, und zwar unter Zugrundelegung der Spielregel, dass der Ziehende jeweils in genau einer Teilposition ziehen muss. Anwendungen auf populäre Spiele sind damit selten. Bekannt sind einerseits sehr späte Endspiele des Go-Spiels sowie beim Schach einige sehr ausgefallene Zugzwang-Positionen in Bauernendspielen. Das folgende Diagramm zeigt ein Beispiel für eine solche Position, die aus der Partie Schweda - Sika, Brünn 1929 stammt.[15]



Der Spieler, der zuerst seinen König ziehen muss, verliert. Daher muss jeder der beiden Spieler versuchen, mit den Bauern den letzten Zug zu machen, wobei natürlich ein Durchmarsch der gegnerischen Bauern zu verhindern ist. Da die Zugmöglichkeiten der vier Bauern der a-b-Linien völlig unabhängig sind zu denen der beiden Bauern auf der h-Linie, handelt es sich im Sinne der Kombinatorischen Spieltheorie um eine durch Nebeneinanderlegen entstehende Summe von zwei Positionen:



Bei dieser Darstellung ist das Summenzeichen nicht nur ein Symbol, sondern besitzt tatsächlich die Eigenschaften, wie sie uns von der Addition „normaler“, das heißt reeller Zahlen her vertraut ist.[16] Wie bei der Addition reeller Zahlen gibt es eine *Null*, die in ihrer Interpretation als (Teil-)Position keinem der beiden Spieler mehr einen Zug erlaubt, sodass der Anziehende, egal ob Weiß oder Schwarz, verliert. Außerdem gibt es eine Subtraktion, die (wie bei der Subtraktion reeller Zahlen) einer Addition mit der negierten Zahl entspricht. Dabei entspricht der Vorzeichenwechsel einer Zahl auf dem Level einer Position dem Austausch der Farben und einer Spiegelung an der Mittelachse des Schachbretts:

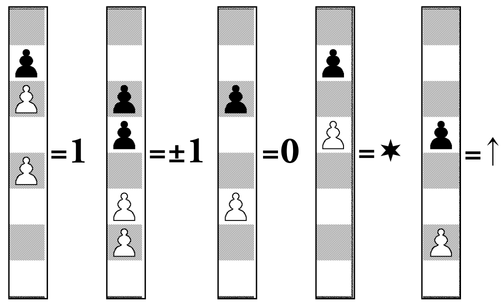


Dass sich, wie in der Abbildung dargestellt, bei der Addition mit der „negierten“ Position die Summe Null ergibt, die als Position ohne jede Zugmöglichkeit definiert wurde, liegt daran, dass das Gleichheitszeichen mehr im Sinne einer *Äquivalenz* zu interpretieren ist. Konkret: Zwei Positionen sind per Definition genau dann „gleich“, das heißt *äquivalent*, wenn sie in beliebigen Summen von (Teil)Positionen gegeneinander ausgetauscht werden können, ohne dass sich die Gewinnaussichten ändern, und zwar sowohl im Fall, dass Weiß anzieht, wie auch im Fall, wenn Schwarz anzieht. Der Äquivalenz-Begriff wurde übrigens erstmals von Emanuel Lasker in seinem Buch *Brettspiele der Völker* am Beispiel von Nim-Varianten formuliert.[17] Lasker verfolgte dabei das Ziel, Positionen als Summen darzustellen, wobei die Summanden einem möglichst überschaubaren Vorrat an Positionen entstammen.

Dass die Gleichung tatsächlich wie oben abgebildet stimmt, liegt daran, dass bei beidseitigem Zugzwang, das heißt, wenn der Nachziehende, egal ob Weiß oder Schwarz, eine Gewinnstrategie besitzt, eine Äquivalenz zur Nullposition gegeben ist. Bei der links abgebildeten Position ist diese Bedingung erfüllt, weil der Nachziehende einfach die Züge des Anziehenden spiegelbildlich kontert.

Übrigens hat bereits Lasker erkannt, dass Positionen mit beidseitigem Zugzwang den Charakter von Nullpositionen besitzen.[18] Addiert man nämlich eine solche beidseitige Zugzwangsposition N zu einer beliebigen Position G, so kann ein in dieser Position G auf Gewinn stehender Spieler, egal ob Weiß, Schwarz, im An- oder Nachzug, seine Gewinnstrategie auf die Summenposition G + N übertragen. Dazu muss er im G-Teil unverändert spielen und im N-Teil genau dann kontern, wenn sein Gegner dort gerade gezogen hat. Die beidseitige Zugzwangsposition *N* verhält sich damit wie eine Null, das heißt, die Positionen *N* und 0 sind äquivalent, weil die beiden Summen *G* + *N* und *G* + 0 für jede Position *G* übereinstimmende Gewinnaussichten bieten.[19]

Höchst exotisch können sich diese Positionen in Bezug auf ihre Größenbeziehungen verhalten. Beispiele dafür findet man bereits bei einfachen Positionen, wie sie die folgende Abbildung zeigt, wobei die drei rechten Positionen im Verlauf der angeführten Problemstellung, zumindest mit umgekehrtem Vorzeichen, auftauchen können. So sind die beiden *Up* und *Star* genannten und mit ↑ und ✶ bezeichneten Positionen größer als jede negative reelle Zahl, kleiner als jede positive reelle Zahl und trotzdem ungleich null. Die Position ↑ kann sogar selbst als positive Zahl interpretiert werden, die kleiner als jede positive reelle Zahl ist, während der Position ✶ dieser Charakter einer Zahl fehlt. Dabei ist eine Position per Definition dann *positiv*, wenn Weiß sowohl als An- wie auch als Nachziehender einen Gewinn erzwingen kann. Außerdem gilt eine Position per Definition genau dann als *größer* als eine andere, wenn ihre Differenz positiv ist.



Für weitere Grundlagen muss auf die Literatur verwiesen werden.[20] Dabei erlaubt es die Kombinatorische Spieltheorie, Endspiele wie das hier angeführte nicht nur im Rahmen einer *Brute-Force-*Attacke, wie sie ein Schachprogramm praktizieren würde, sondern auch durch eine Untersuchung der einzelnen Teilpositionen vollständig zu analysieren. Dies geschieht, wie stets in der Kombinatorischen Spieltheorie, durch die Analyse beider Fälle des Anzugsrechts, wozu jede Position formal durch zwei Mengen von Positionen charakterisiert wird, nämlich bestehend aus den Positionen, die mit einem Zug von Weiß beziehungsweise Schwarz erreicht werden können. Beispielsweise wird die rechts abgebildete Position durch ({0,✶}, {✶}) charakterisiert, was man üblicherweise kürzer in der Form {0,✶ | ✶} schreibt. Übrigens bleibt die darin vorkommende Position ✶= {0|0} bei einem Vorzeichenwechsel unverändert, und es gilt ✶ + ✶= 0. Außerdem kann bei der Position {0,✶|✶} generell die zweite Zugmöglichkeit für Weiß – entsprechend dem Einzelschritt des weißen Bauern ausgehend von der zweiten Reihe – weggelassen werden, wozu man die Gleichung {0,✶|✶} + {✶|0} = 0 verifizieren muss: Bei dieser Summe kann der Nachziehende immer gewinnen, und zwar fast immer dadurch, dass er spiegelbildlich kontert. Einzige Ausnahme ist der für Weiß mögliche Zug nach

$\ast + \{\ast|0\}$, den Schwarz im linken Summanden kontert und mit der Positionsfolge $\{\ast|0\}$, $\ast$, 0 gewinnt. Da die beiden Endspiele $\{0|0\}$ und $\{0|\ast\}$ in vielen verschiedenen Spielen auftreten, haben sie die schon genannten Namen und Kürzel, eben $\ast$ und $\uparrow$, erhalten.

Die rechte Teilposition des abgebildeten Bauernendspiels entspricht formal der Position $\{-\uparrow \mid \ast,0\} = \{-\uparrow \mid 0\}$, wobei man diese Äquivalenz wieder wie gerade zeigen kann.[21] Deutlich komplizierter und entsprechend aufwändiger in ihrer Analyse ist die Teilposition, welche die vier Bauern der a- und b-Linien umfasst. Allerdings ist das Ergebnis vergleichsweise einfach, denn diese Teilposition ist gleich $\uparrow$.

Um das Endspiel zu gewinnen, muss Weiß einfach von $\uparrow + \{-\uparrow|0\}$ durch einen Zug mit seinem h-Bauern nach $\uparrow - \uparrow = 0$ ziehen. Schwarz besitzt dagegen mit seinem h-Bauer keinen Gewinnzug, weil der Zug nach $\uparrow + 0 = \uparrow = \{0|\ast\}$ Weiß den Gewinn ermöglicht. Dagegen erreicht Schwarz mit dem Zug in der linken Teilposition von $\uparrow + \{-\uparrow|0\} = \{0|\ast\} + \{-\uparrow|0\}$ zur Position $\ast + \{-\uparrow|0\}$, dass Weiß mit keiner seiner beiden Erwiderungen, die zu den Positionen $\{-\uparrow|0\}$ und $\ast - \uparrow$ führen, gewinnen kann. Dass sich hinter dem zum Gewinn führenden Anfangszug für Schwarz der Zug 1...a5 verbirgt, ergibt sich aus den Details der Analyse zur linken Teilposition. Ein paar Highlights dazu enthält die untenstehende Abbildung.[22]

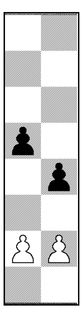
RESÜMEE

Abgesehen von den Grundlagen der Schachprogrammierung sind die praktischen Auswirkungen der hier beschriebenen Sachverhalte gering. Bemerkenswert ist aber, dass die Schachregeln bei Positionen nicht nur bestens bekannte Muster wie beispielsweise Doppelbauern, Fesselung und Abzugsschach ermöglichen, sondern ebenso Muster, die einen anspruchsvollen algebraischen Charakter aufweisen.

ANMERKUNGEN

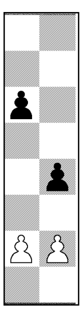
1 Überblicke geben: Robert Leonard, *Von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory. From chess to social science, 1900–1960*, New York 2010. Jörg Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen*, Wiesbaden 1998, 6. Auflage 2012. Im letztgenannten Buch finden sich tiefergehende Darstellungen und ergänzende Referenzen zu allen hier behandelten Themen.
2 Vortrag auf dem 1912 abgehaltenen 5. Internationalen Mathematikerkongress. E. Zermelo, „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proceedings of the Fifth Congress of Mathematics*, Vol. II, Cambridge 1913, S. 501–504.
3 Beispielsweise wurde Emanuel Lasker wiederholt eine „psychologische Spielweise" zugeschrieben. Eine Gegenposition vertritt Robert Hübner, „Laskers 'psychologische Spielweise'", in: Elke-Vera Kotowski, Susanna Poldauf, Paul Werner Wagner (Hrsg.), *Emanuel Lasker. Homo ludens – homo politicus*, S. 149–160.
4 Zermelo (Fn 2), S. 504.
5 R. Gasser, J. Nievergelt, „Es ist entschieden: Das Mühlespiel ist unentschieden", in: *Informatik Spektrum*, 17 (1994), S. 314–317; Ralph Gasser, „Solving Nine Men's Morris", in: R. J. Nowakowski (ed.), *Games of no chance*, Cambridge 1996, S. 101–113.
6 *Southern Literary Messenger*, 2 (1836), S. 318–326, Übersetzung zitiert nach *Der Schachautomat des Baron von Kempelen*, Dortmund 1983.
7 W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901, S. 81.
8 S. xxxi. Siehe auch: David Hooper, „The theory of Steinitz", in: *British Chess Magazine*, 104 (1984), S. 370 (Nachdruck in: Kurt Landsberger, *William Steinitz, chess champion*, Jefferson 1993, S. 465–470); Johannes Fischer, „William Steinitz", *Karl*, 4/2003, S. 12–13.
9 Gesichert sind nur gemeinsame Kontakte zu Mathematikern in Göttingen, wo beide einige, allerdings unterschiedliche Jahre verbrachten, sowie ein Brief Laskers an Zermelo aus dem Jahr 1929, in dem es um einen Vorschlag für eine Wertungszahl für die Spielstärke von Schachspielern ging.
Mark E. Glickman, „Introductory note to 1928", in: Ernst Zermelo, *Collected Works*, Volume II, S. 616–621, dort S. 620; Joachim Rosenthal, „Der Mathematiker Emanuel Lasker", in: *Emanuel Lasker: Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister*, S. 213–231, dort S. 228.
10 Emanuel Lasker, *Gesunder Menschenverstand im Schach*, Berlin, 1925, S. 80 f.
11 Auswertung der Datenbank *Chess Assistant*, zitiert nach dem Stichwort „Schach" der deutschsprachigen *Wikipedia*, 2.2.2016. Detailliertere Angaben findet man in der englischsprachigen *Wikipedia* im Artikel „First-move advantage in chess."
12 John H. Conway, *Über Zahlen und Spiele*, Braunschweig 1983 (amerikanisches Original 1976), S. 56.
13 Gespielt wird mit Spielsteinen, die zu Haufen gruppiert sind. Die Spieler ziehen abwechselnd. Pro Zug dürfen beliebig viele Steine eines einzelnen Haufens genommen werden. Wer keinen Stein mehr nehmen kann, hat verloren.
14 Charles L. Bouton, „Nim, a game with a complete mathematical theory", in: *Annals of Mathematics*, Series II, 3 (1901/02), S. 35–39.
15 Max Euwe, David Hooper, *A guide to chess endings*, New York 1960, S. 56 f.
16 Viele der Positionen, aber nicht alle, können sogar als Zahlen interpretiert werden. Allerdings muss dazu der Zahlenstrahl der reellen Zahlen um unendlich kleine und unendlich große Zahlen erweitert werden zu einem Bereich der sogenannten *surrealen Zahlen*.
17 *Brettspiele der Völker*, Berlin 1931, S. 186. Bei diesen Nim-Spielen kann die Äquivalenz allerdings etwas einfacher definiert werden, da es sich um *neutrale* Spiele handelt, die sich dadurch auszeichnen, dass die Zugmöglichkeiten beider Spieler stets identisch sind.
18 Lasker (Fn 16, S. 183) behandelt allerdings nur neutrale Spiele.
19 Um zu erkennen, dass auch umgekehrt jede Nullposition beidseitigen Zugzwang zur Folge hat, geht man von einer beliebigen Position *N* aus, die zur Position 0 äquivalent ist. Diese Position *N* muss insbesondere die Eigenschaft besitzen, dass in der Summe 0+0 ein Summand gegen die Position *N* ausgetauscht werden kann, ohne dass sich die Gewinnaussichten ändern. Damit muss die Position *N* die gleichen Gewinnaussichten wie die Position 0 besitzen, womit der in der Position *N* Nachziehende, egal ob Weiß oder Schwarz, eine Gewinnstrategie besitzt.
20 Den aktuellen Stand der Forschung präsentiert Aaron N. Siegel, *Combinatorial game theory*, Providence 2013.
21 Darüber hinaus gilt die Äquivalenz zur Summe $-\uparrow -\uparrow + \ast$.
22 Noam D. Elkies, „On numbers and endgames: Combinatorial game theory in chess endgames", in: Richard J. Nowakowski (ed.), *Games of no chance*, Cambridge 1996, S. 135–150.

Der Autor dankt Herrn Michael Negele für die Ermunterung zu dieser Zusammenstellung und für hilfreiche Anmerkungen zu Vorabversionen.



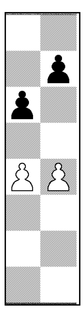
$= \{0, \ast|0\}$

$= \uparrow + \ast$



$= \{0|\uparrow + \ast\}$

$= \uparrow + \uparrow$



$= \{\ast|0\}$

$= -\uparrow$

Dr. Jörg Bewersdorff, geboren 1958, promovierte 1985 in Mathematik an der Universität Bonn. Seitdem ist er in der Automatenwirtschaft tätig, seit 1998 als Geschäftsführer von Tochterunternehmen der Gauselmann AG. Er ist Autor von vier Lehrbüchern über Themen der Mathematik und Informatik, darunter einem über die Mathematik der Spiele.