Lasker und die Mathematik der Spiele

Preprint des Kapitels „Emanuel Lasker and game theory“, in: Richard Forster, Michael Negele, Raj Tischbierek (Hrsg.), „Emanuel Lasker, Volume II. Choices and Chances“, Berlin 2020, ISBN: 978-3-935800-10-5

JÖRG BEWERSDORFF

Die von Emanuel Lasker publizierten Werke weisen thematisch eine große Breite auf. Neben seinen Büchern über Schach, die aufgrund seiner Popularität als Schachweltmeister anscheinend kommerziell am erfolgreichsten waren,[1] und einigen mathematischen Veröffentlichungen[2] gehören zu Laskers Werken philosophische Monographien, insbesondere über Aspekte des Kampfes,[3] sowie populärwissenschaftliche Bücher über Karten- und Brettspiele. Obwohl es nahe liegt, auch in Laskers nicht-mathematischen Publikationen nach mathematischen Ansätzen zu suchen, wurde dies bisher nicht oder nur punktuell gemacht.[4]

Als Ausnahme ist zunächst der in der DDR wirkende Philosoph, Kybernetiker und Schachmeister Georg Klaus zu nennen. Von ihm stammt eine fast als enthusiastisch zu bezeichnende Rezeption Laskers als Pionier der mathematischen Spieltheorie.[5] Laskers 1919 erschienenes Buch *Die Philosophie des Unvollendbar* enthalte, so Klaus, bereits „alle Grundgedanken der modernen Theorie der Spiele und die Beschreibung aller zu diesem Grundgedanken führenden Abstraktionsprozesse“.[6]

Die Spieltheorie: Worum geht es?

Eine kritische Würdigung von Laskers Gedanken über Spiele kann nur auf Basis von Begriffsbildungen und Resultaten der Spieltheorie erfolgen. Daher beginnen wir mit einem kurzen Abriss der thematischen und chronologischen Anfänge der Spieltheorie. Die getroffene Auswahl orientiert sich daran, ob Überschneidungen mit Laskers Überlegungen bestehen.

In der Spieltheorie werden interaktive Entscheidungsprozesse mit mathematischen Methoden im Hinblick auf primär ökonomische Anwendungen untersucht. Basis der Spieltheorie ist ein formales Modell eines Spiels, das

[1] Siehe dazu Bernd Gräfrath, *Lasker als Philosoph*, in: Richard Forster, Stefan Hansen, Michael Negele, *Emanuel Lasker, Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister*, Berlin 2009, S. 233–250, insbesondere S. 234.
[2] Siehe Joachim Rosenthal, *Der Mathematiker Emanuel Lasker*, in: *Emanuel Lasker: Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister*, S. 213–231.
[3] Gräfrath (Fn 1).
[4] Auf kaum mehr als eine Aufzählung der nicht-mathematischen Werke, die mathematische Inhalte aufweisen, beschränkt sich Matthias Thesing, *Zum mathematischen Werk von Emanuel Lasker*, Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II/I, Universität Münster 1999, S. 22.
[5] Georg Klaus, *Emanuel Lasker – ein philosophischer Vorläufer der Spieltheorie*, Deutsche Zeitschrift für Philosophie, **13** (1965), S. I/976–988.
[6] Klaus (Fn 5), S. 976. Klaus gibt den Titel irrtümlich mit *Die Philosophie des Unvollendbaren* an. Zustimmung erfährt Klaus durch Oliver Lembcke, *Homo ludens oder homo oeconomicus? – Die Bedeutung des Spiels im Denken Laskers*. In: Michael Dreyer, Ulrich Sieg (Hrsg.), *Emanuel Lasker, Schach, Philosophie, Wissenschaft*, Berlin 2001, S. 129–151.

völlig abstrakt auf Basis mathematischer Objekte wie Mengen, Abbildungen und Zahlen definiert ist. Dieses Modell umfasst sowohl die im Fokus stehenden ökonomischen Entscheidungsprozesse als auch Gesellschaftsspiele wie Schach, Poker und Bridge, die gelegentlich als Beispiele zur Erläuterung spieltheoretischer Sachverhalte verwendet werden.

Als Geburtsjahr der Spieltheorie gilt das Jahr 1944, als der Mathematiker österreich-ungarischer Herkunft John von Neumann zusammen mit dem Ökonomen Oskar Morgenstern die monumentale Monographie *Theory of games and economic behavior* veröffentlichte. Allerdings gab es bereits zuvor einzelne, isolierte Untersuchungen zu ähnlichen Fragestellungen.[7] Zu nennen sind insbesondere eine Veröffentlichung durch John von Neumann aus dem Jahr 1928,[8] fünf kurze, wenige Jahre ältere Beiträge von Émile Borel,[9] eine theoretische Untersuchung über das Schachspiel aus dem Jahr 1912 von Ernst Zermelo[10] und eine Untersuchung von Charles Bouton aus dem Jahr 1901 über eine Gewinnformel für Nim, ein sehr einfaches Strategiespiel für zwei Personen.[11]

Das formale Modell eines Spiels dient in der Spieltheorie zunächst dazu, interaktive Entscheidungsprozesse präzise zu beschreiben. Dazu werden die Regeln, gemäß denen sich die beteiligten Akteure entscheiden müssen, durch entsprechende mathematische Objekte modelliert. Ziel der Spieltheorie ist es, rationales Entscheidungsverhalten zu charakterisieren, zu untersuchen und in konkreten Fällen zu berechnen. Was als rational zu werten ist, ist dabei a priori keineswegs selbstverständlich. Eine wesentliche Grundlage der Bewertung bilden aber am Eigennutz der Spieler orientierte Präferenzen, deren möglichst weitgehende Realisierbarkeit unter dem Blickwinkel ebenso agierender Mitspieler geprüft wird.

[7] Überblicke geben: Jörg Bewersdorff, *Luck, logic, and white lies: The mathematics of games*, Wellesley 2004 (deutsches Orig. 1998). Robert Leonard, *Von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory. From chess to social science, 1900–1960*, New York 2010. Siehe auch die Literatur in Fn 108.

[8] *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, **100** (1928), S. 295–320.

[9] Émile Borel, *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **173** (1921), S. 1304–1308; *Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des jouers*, Conférences: Compte Rendu de la 47e Session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Bordeaux 1923, S. 79–85; *Sur les jeux où l'hasard se combine avec l'habileté des joueurs*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **178** (1924), S. 24–25; *Un théorème sur les systèmes de formes linéaires a déterminant symétrique gauche*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **183** (1926) S. 925–927; *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **184** (1927), S. 52–54. Englische Übersetzungen von drei Arbeiten: *Commentary on the three notes of Emile Borel*, Econometrica, **21** (1953), S. 101–127.

[10] Vortrag auf dem 1912 abgehaltenen 5. Internationalen Mathematikerkongress. E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proceedings of the Fifth Congress of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1913, S. 501–504.

[11] Charles L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics, Series II, **3** (1901/02), S. 35–39.

Gesellschaftsspiele unter dem Blickwinkel der Spieltheorie

Obwohl die Spieltheorie wie dargelegt nicht primär der Untersuchung von „richtigen“ Spielen dient, ist es natürlich trotzdem möglich, übliche Gesellschaftsspiele unter dem Blickwinkel der Spieltheorie zu analysieren. Solche Gesellschaftsspiele verfügen in der Regel über eine Eigenschaft, die in ökonomischen Anwendungen oft nicht gegeben ist und insbesondere im Fall von zwei Spielern bedeutsame Schlussfolgerungen erlaubt. Es handelt sich um die sogenannte Nullsummen-Eigenschaft, die sich darauf bezieht, dass die Summe aller Gewinne stets gleich null ist. Im Fall von zwei Mitspielern bedeutet das, dass der Gewinn des einen Spielers immer gleich dem Verlust seines Kontrahenten ist. Die Interessen beider Spieler laufen damit vollkommen konträr.

Bei Zwei-Personen-Brettspielen wie Schach ist die Charakterisierung rationalen Verhaltens, wie Zermelos bereits erwähnte Untersuchung zeigt, in der Theorie relativ einfach. Jede Schachposition, selbst die Anfangsstellung, hat nämlich *im Prinzip* den Charakter einer Problemstellung. Konkret hat entweder Weiß eine zwingende Gewinnstrategie, oder für Schwarz existiert eine solche zwingende Gewinnstrategie, oder aber jeder der beiden Spieler kann zumindest ein Remis erzwingen. Es gibt damit für jeden der beiden Spieler in jeder Spielsituation, und zwar unabhängig vom gegnerischen Verhalten, stets zumindest eine absolut beste Verhaltensweise, mit der dieser sichere Gewinn von +1, 0 beziehungsweise –1 mindestens erreicht wird. Sollte sich auch der Gegner entsprechend optimal verhalten, ergibt sich *genau* dieses Spielresultat. Psychologie mag in der Praxis eines Schachturniers eine Rolle spielen,[12] in der Theorie ist sie irrelevant, wie inzwischen auch der überragende Erfolg von Computerprogrammen zeigt.

Dass man den Wert der meisten Schachpositionen nicht kennt, schmälert nicht die Aussage von Zermelos theoretischem Satz.[13] Bereits Zermelo hatte darauf hingewiesen, dass insbesondere die Beantwortung der Frage, „ob die Anfangsposition … bereits für eine der spielenden Parteien eine ‚Gewinnstellung' ist“, offen sei.[14] Mit dieser Frage hat sich übrigens auch Lasker auseinandergesetzt. Allerdings ist nicht klar, ob Lasker dabei wirklich den mathematisch-formalen Aspekt der Fragestellung vor Augen hatte, als er in Bezug auf die Anfangsstellung formulierte: „Wenn das Problem des Schachmatts lösbar wäre, so mußte es, sollte man glauben, nach so langer

[12] Gerade Lasker wurde eine „psychologische Spielweise“ zugeschrieben. Eine kritische Auseinandersetzung mit dieser These gibt Robert Hübner, *Laskers „psychologische Spielweise“*, in: Elke-Vera Kotowski, Susanna Poldauf, Paul Werner Wagner (Hrsg.), *Emanuel Lasker. Homo ludens – homo politicus*, S. 149–160.

[13] Zermelos Beitrag dürfte vor allem die Formalisierung und den darauf beruhenden Beweis umfassen. Das Ergebnis war Mathematikern anscheinend bereits vorher vertraut. So bemerkte Ahrens bereits 1901 in einem populärwissenschaftlichen Buch: „[E]ine abschließende, alle nur möglichen Fälle umfassende Theorie [ist] kaum denkbar … und [liegt] für das Schach z. B. nicht im geringsten [vor, wird] ... auch schwerlich jemals gewonnen werden …, wir meinen eine Theorie, welche für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und welche etwa das Resultat ergeben würde, dass der Anziehende stets siegen muss oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie – auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners – stets unentschieden machen kann.“ W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901, S. 81.

[14] Zermelo (Fn 10), S. 504.

Zeit so vieler und so ernster Bemühungen gelöst sein. Und dennoch war man so weit entfernt wie je, ja, weiter denn je. Daraus schloß Steinitz, dass die Anfangsstellung im Gleichgewicht sein müsse. Ein Schluß aus Erfahrung und daher nicht so sicher wie $2 + 2 = 4$. Er ist nicht einmal ausgedrückt, denn im genauen Gleichgewichte kann die Anfangsstellung kaum sein, da das Recht des Anzugs einen Unterschied zwischen Weiß und Schwarz hervorbringt, einen Unterschied, der wohl nicht ganz unwesentlich sein dürfte.“[15] Dazu ist anzumerken, dass nach Zermelos Satz solche „nicht ganz unwesentlichen Unterschiede“ theoretisch nur in Form sehr wesentlicher Unterschiede möglich sind: Sofern Schach nicht ausgeglichen ist, kann einer der beiden Spieler einen Gewinn erzwingen. Feinere Differenzierungen sind theoretisch nicht notwendig,[16] auch wenn sie im praktischen Spiel selbstverständlich eine wichtige Rolle spielen, allerdings „nur“ in Bezug auf die relativen Häufigkeiten entsprechender Zugfolgen und die dadurch bedingte Schwierigkeit, demgemäße Strategien zu finden. Dies wäre eine Erklärung dafür, dass in Turnierpartien knapp 55% der erreichbaren Punkte durch Weiß gewonnen werden.[17]

Immerhin bekannt ist der Wert 0 einer absolut symmetrischen Situation, wie sie sich zum Beispiel mit zwei Schachpartien mit wechselndem Anzugsrecht herstellen lässt. Wer dann diesen Wert 0 weder erreicht noch übertrifft, hat schlecht gespielt. Nur deshalb sind Spiele wie Schach als Basis eines intellektuellen Wettkampfes geeignet. Beim Brettspiel Mühle konnte der Wert 0 sogar für die Anfangsposition eines einzelnen Spiels nachgewiesen werden.[18]

Resümierend lässt sich feststellen, dass es beim Schach keine Situation gibt, wie wir sie vom Spiel Schere-Stein-Papier her kennen. Bei Schere-Stein-Papier kann nämlich keiner der beiden Spieler dadurch, dass er sich für einen bestimmten Zug entscheidet, seinen Verlust, das heißt den „Gewinn“ –1, verhindern. Dort hängt alles davon ab, wie die zeitlich parallel erfolgende Entscheidung des Gegners ausfällt. Anzumerken bleibt, dass das Dilemma, keinen besten Zug finden zu können, nicht unbedingt gleichzeitig stattfindender Zugentscheidungen bedarf. Die Züge von Schere-Stein-Papier können nämlich durchaus auch sequentiell organisiert werden, wenn der zuerst ziehende Spieler seine Zugentscheidung zum Beispiel in Form einer auszuwählenden, aber für den Gegner nicht einsehbaren Spielkarte vollziehen muss.

Immerhin gilt die für Brettspiele wie Schach beschriebene Eigenschaft, dass jede Spielsituation einen eindeutig bestimmten Wert besitzt, im Prinzip auch für ein zufallsabhängiges Zwei-Personen-Brettspiel wie Back-

[15] Emanuel Lasker, *Gesunder Menschenverstand im Schach*, Berlin, 1925, S. 80 f.

[16] Aus diesem Grund hat Robert Hübner die Beschränkung von Zug-Annotationen auf die Symbole „?“ und „??“ befürwortet, je nachdem, ob sich durch einen schlechten Zug der sicher erzielbare Gewinn um den Wert 1 oder 2 verringert. Robert Hübner, *Twenty-five annotated games*, Berlin 1996, S. 7–8.

[17] Datenbank chessgames.com mit 799.564 Partien aus den Jahren 1475–2016 (Abruf 31.10.2016): Weiß gewinnt: 37,64 %, remis: 34,53 %, Schwarz gewinnt 27,83 %.

[18] R. Gasser, J. Nievergelt, *Es ist entschieden: Das Mühlespiel ist unentschieden*, Informatik Spektrum, **17** (1994), S. 314–317; Ralph Gasser: *Solving Nine Men’s Morris*, in: R. J. Nowakowski (ed.), *Games of no chance*, Cambridge 1996, S. 101–113.

gammon. Allerdings können sich die Werte bei Backgammon immer nur auf den Erwartungswert beziehen, der dem Durchschnitt der Gewinne entspricht, der sich auf lange Dauer bei einer Sequenz von Partien ergeben würde. Demgegenüber kann das Resultat einer einzelnen Partie selbst bei einer beidseitig fehlerfreien Spielweise davon abweichen. Außerdem sind anders als beim Schach die möglichen Werte von Positionen im gesamten Intervall zwischen den Zahlen von –1 bis +1 angesiedelt,[19] weil es sich bei diesen Werten um Erwartungswerte handelt.

Dass jede Spielsituation bei Brettspielen wie Schach und Backgammon einen eindeutig bestimmten Wert besitzt, beruht maßgeblich darauf, dass jeder Spieler stets über das gesamte bisherige Spielgeschehen und damit die aktuelle Spielsituation informiert ist. In einem solchen Spiel, das man als Spiel mit *perfekter Information* bezeichnet, kann ein Spieler immer die möglichen Wirkungen einer aktuell für ihn zur Auswahl stehenden Zugentscheidung objektiv, das heißt unabhängig vom Blickwinkel, abwägen. Dazu richtet jeder Spieler seine Zugentscheidungen am eigenen Interesse aus und unterstellt diejenige Gegenstrategie, die für ihn selbst am ungünstigsten ist. Bei diesem Ansatz ergibt sich dadurch, dass beide Spieler einen übereinstimmenden Informationsstand besitzen, aus beiden Perspektiven die gleiche Prognose über die Möglichkeiten des weiteren Spielverlaufs. Hingegen würde der analoge Ansatz bei einem Spiel wie Schere-Stein-Papier je nach Perspektive und subjektivem Informationsstand zu unterschiedlichen Einschätzungen des weiteren Spielverlaufs führen. Konkret kann jeder der beiden Spieler, wenn er seine aktuelle Zugentscheidung berücksichtigt, sechs der neun möglichen Spielverläufe ausscheiden – aber eben unterschiedliche sechs Möglichkeiten.

Analoge Phänomene wie beim Spiel Schere-Stein-Papier treten auch bei Zwei-Personen-Spielen auf, bei denen es wie beim Poker noch offenkundiger ist, dass die Informationsstände, die die Spieler bei ihren Entscheidungen besitzen, unterschiedlich sind. Konkret muss sich jeder der beiden Pokerkontrahenten über die Gebote, die er macht beziehungsweise mithält, jeweils auf Grundlage seines aktuellen, individuellen Informationsstandes entscheiden. Dabei zeichnen sich Kartenspiele wie Poker in der Regel dadurch aus, dass dieser individuelle Informationsstand die verdeckt vom Gegner gehaltenen Karten *nicht* umfasst. Bereits Émile Borel hatte in den 1920er-Jahren erkannt, wie solche Spiele formal modelliert werden können. Dazu geht man fiktional davon aus, dass jeder Spieler vor Spielbeginn insgeheim einen vollständigen, *Strategie* genannten, Handlungsplan für jede mögliche Spielsituation entwirft.[20] Dabei kann es für einen Spieler unter Umständen sogar sinnvoll sein, anders als beim Schach die eigene Spielweise zufällig auszuwählen, um so für den Gegner undurchschaubarer zu werden. Eine solche Festlegung darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler seine Spielweise auslost, wird *gemischte Strategie* genannt.

---

[19] Bei einer Spielregel mit Verdopplungswürfel sogar noch über diesen Bereich hinaus.

[20] Berücksichtigt man außerdem die zufälligen Einflüsse im Sinne ihres durchschnittlichen Ergebnisses, des sogenannten Erwartungswertes, dann wird bei dieser formalen Betrachtungsweise jedes endliche Zwei-Personen-Spiel durch eine unter Umständen astronomisch große Matrix repräsentiert. Dabei entsprechen die Zeilen den Strategien des ersten Spielers, die Spalten den Strategien seines Gegners und die Matrixeinträge den Erwartungswerten der Gewinne des ersten Spielers. Jedes Zwei-Personen-Spiel, bei dem der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust seines Gegners ist, erhält damit eine zu Schere-Stein-Papier analoge Form.

Aber erst von Neumann konnte 1928 beweisen,[21] dass diese Erweiterung von Verhaltensweisen – entgegen der Vermutung von Borel – tatsächlich reicht, um die Existenz objektiv bester Verhaltensweisen für jeden der beiden Spieler zu garantieren.[22] Wie beim Schach ist diese Form der Optimalität nicht an ein Verhalten des Gegenspielers gebunden. Agieren beide Spieler in diesem Sinne optimal, ergibt sich auch in diesem allgemeinen Fall wieder der eindeutig bestimmte Wert des Spiels, der als *Minimax-Wert* bezeichnet wird. Allerdings kann ein Gewinn in dieser Höhe wie beim Backgammon in einer einzelnen Partie nur in Form eines Erwartungswertes garantiert werden. Um den Minimax-Wert zumindest annähernd als durchschnittlichen Gewinn zu realisieren, muss eine genügend lange Serie von Einzelpartien gespielt werden.

Im Beispiel des für beide Spieler symmetrischen Spiels Schere-Stein-Papier lässt sich der Minimax-Wert 0 des Spiels dadurch realisieren, dass ein Spieler seine Entscheidung zufällig mit gleichen Wahrscheinlichkeiten von jeweils 1/3 zwischen den drei Möglichkeiten auslost. Ein Spieler, der derart agiert, ist von seinem Gegner, mag dieser psychologisch noch so gewieft sein, nicht mehr zu durchschauen.

Eine solche gemischte Strategie, also das zufällige Auswürfeln der eigenen Spielstrategie, kann aus rein spielerischem Blickwinkel bei einigen Spielen dadurch motiviert werden, dass man es auf diese Weise dem Gegner erschwert, aus der eigenen Verhaltensweise Schlüsse auf den eigenen Informationsstand wie das eigene Kartenblatt folgern zu können. Beim Poker ist der sogenannte Bluff ein Beispiel für ein solches Vorgehen: Weil man in der Regel mit guten Kartenblättern tendenziell höhere Gebote macht, ist es verlockend, ausnahmsweise auch einmal mit einem schlechten Blatt hoch zu bieten und damit dem Gegner zu suggerieren, ein gutes Kartenblatt in Händen zu halten, um ihn auf diese Weise zum Passen zu veranlassen. Der Preis für diese Kühnheit ist das Risiko, vom Gegner durchschaut zu werden und sodann das hohe Gebot im *Showdown* der Kartenblätter zu verlieren.

Verhält es sich aber in Wirklichkeit nicht so, dass das Bluffen und das Erkennen eines Bluffs reine Psychologie sind? In der Praxis sicherlich, wenn das sprichwörtliche Pokerface das Verhalten seines Kontrahenten aufgrund beobachteter Gesten und Mimik durschaut und damit scheinbar hinter dessen Stirn blicken kann. Aber gegen ein Poker spielendes Computerprogramm, das seine Entscheidungen gemäß optimierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen zufällig trifft, hilft sicher keine Psychologie.[23]

---

[21] Von Neumann (Fn 8). In der Veröffentlichung ist vermerkt, dass ihr Inhalt einem Vortrag folgt, den der damals 22-Jährige am 7. Dezember 1926 in Göttingen gehalten hat. Bartel van der Waerden berichtet, dass ihm von Neumann während eines Spaziergangs bereits damals die Möglichkeit von Anwendungen auf Ökonomie und richtige Spiele erläutert habe. B. L. van der Waerden, *Die Theorie der Gesellschaftsspiele*, in: Bayrische Akademie der Schönen Künste (Hrsg.), *Der Mensch und das Spiel in der verplanten Welt*, München 1976, S. 48–57.

[22] Voraussetzung ist allerdings die bereits erwähnte Nullsummen-Eigenschaft, die bei normalen Karten- und Gesellschaftsspielen, anders als in der Ökonomie, in der Regel erfüllt ist. Das bekannteste Gegenbeispiel ist das sogenannte *Gefangenendilemma*.

[23] Michael Bowling, Neil Burch, Michael Johanson, Oskari Tammelin, *Heads-up limit hold'em poker is solved.* Science, **347** (2015), S. 145–149.

Bei einem Spiel für mindestens drei Mitspieler ist die Bestimmtheit, die wir als typisches Element von Gesellschaftsspielen für zwei Personen zumindest auf dem Level von Erwartungswerten und gemischten Strategien kennengelernt haben, in der Regel nicht mehr vorhanden. Am deutlichsten zeigt sich dieser Unterschied bei symmetrisierten Spielen. So kann bei einem Drei-Personen-Brettspiel wie Halma, bei dem das Anzugsrecht chancenmäßig mit sechs Partien mit jeder möglichen Reihenfolge der anfänglichen Zugrechte ausgeglichen wird, in der Regel kein Spieler aus eigener Kraft einen Verlust in Form eines negativen Gewinnsaldos sicher verhindern. Das liegt einfach daran, dass ein einzelner Spieler zu wenig Einfluss auf das Spielgeschehen hat im Vergleich zu den beiden anderen Spielern, egal ob diese – regelwidrig oder konträr zur Etikette eines Fairplays – bewusst koaliert haben oder sich unbeabsichtigt gegenseitig die „Bälle zugeschoben" haben.

Zwar existiert, wie Kuhn 1950 bewiesen hat, bei einem Drei-Personen-Spiel mit perfekter Information wie Halma stets mindestens ein strategisches Gleichgewicht.[24] Dieses Gleichgewicht beinhaltet für jeden der drei Spieler eine Strategie, und zwar derart, dass sich kein *einzelner* Spieler durch Abweichung von der Strategie, die für ihn im Gleichgewicht vorgesehen ist, verbessern kann. Die Stabilität des Gleichgewichts bleibt allerdings nicht mehr garantiert, wenn sich mindestens zwei Spieler für andere Vorgehensweisen entscheiden. Außerdem kann es bei Mehrpersonenspielen, anders als bei den hier angeführten Gesellschaftsspielen für zwei Personen, durchaus Gleichgewichte mit unterschiedlichen Spielresultaten geben.

Die ab drei Mitspielern in der Regel verloren gehende Bestimmtheit ist die Erklärung dafür, dass intellektuelle Wettkämpfe für mehrere Personen in der Regel nicht auf Basis von Mehrpersonenspielen, sondern nur auf Basis von turniermäßig ausgetragenen Zwei-Personen-Spielen veranstaltet werden. Dabei muss der Ablauf des Turniers so gestaltet werden, dass Koalitionen nicht im Stande sind, den Turniersieg zu beeinflussen.[25]

Auch bei Mehrpersonen-Spielen ohne perfekte Information ist die Existenz von Gleichgewichten gesichert, sofern man die Strategien der Spieler auf gemischte Strategien erweitert. Bewiesen wurde dies von John Nash 1950 in seiner 32 Schreibmaschinenseiten umfassenden Dissertation *Non-cooperative games*,[26] für die Nash 44 Jahre später zusammen mit den Spieltheoretikern John C. Harsanyi und Reinhard Selten mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften[27] ausgezeichnet wurde. Neben der De-

[24] H. W. Kuhn, *Extensive games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, **36** (1950), S. 570–576. Der Satz gilt für alle endlichen Mehrpersonenspiele mit perfekter Information.

[25] Aus diesem Grund wurden nach dem Kandidatenturnier 1962 in Curaçao, bei dem es zu Kollusionsvorwürfen gegenüber den sowjetischen Spielern gekommen war, die Regeln durch die FIDE modifiziert. Siehe: Bobby Fischer, *Schacher im Schach. Das abgekartete Spiel der Russen*, Der Spiegel, 41/1962, S. 94–97.

[26] Ein Faksimile der Dissertation findet man in Harold W. Kuhn, Sylvia Nasar (ed.), *The essential Nash*, Princeton 2002, S. 53–84. Siehe auch: John Nash, *Equilibrium points in N-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, **36** (1950), S. 48–49; John Nash, *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics, **54** (1951), S. 286–295.

[27] Eigentlich handelt es sich um den „Preis der Schwedischen Reichsbank in Wirtschaftswissenschaft zur Erinnerung an Alfred Nobel".

finition des Gleichgewichts und dem Existenzbeweis berechnete Nash in seiner Dissertation auch ein Beispiel, bei dem es sich um ein stark vereinfachtes Modell eines Drei-Personen-Pokers handelte.

Lasker über Kampf und Spiele

Unbestreitbar versuchte Lasker mit seinen philosophischen Werken, seine Erfahrungen mit Schach und anderen Spielen auf das „normale" Leben zu übertragen. Dabei hat sich Laskers Hoffnung, seine 1919 erschienene *Philosophie des Unvollendbar* werde seinen Ruhm als Schachspieler und seine mathematischen Forschungsergebnisse überleben, offenkundig nicht erfüllt.[28] Diesbezüglich kann auch die eingangs zitierte Würdigung von Klaus nicht überzeugen, wenn er zum Beispiel glaubt, in zitierten Passagen rein verbaler Erläuterungen Laskers spieltheoretische Grundkonzepte zu erkennen. Dem ist entgegenzuhalten, dass es Lasker selbst im Rahmen seiner philosophischen Überlegungen ohne Mühe möglich gewesen wäre, mathematische Konzepte und Sachverhalte auch ohne mathematischen Formalismus rein verbal exakt zu darzulegen, wenn dies denn wirklich seine Intention gewesen wäre.

In diesem Zusammenhang muss besonders auf den Begriff *Gleichgewicht* und seine Verwendung durch Lasker eingegangen werden. Klaus zitiert dazu Lasker wie folgt: „Es gibt nun Lagen, wo beide Parteien im Gleichgewicht stehen. Dieser Satz folgt aus dem Prinzip der Stetigkeit. Zwischen einer Lage, wo eine Partei A das Übergewicht hat, und einer anderen, wo die zweite Partei B das Übergewicht hat, werde eine stetige Verbindung hergestellt. So wird eine stetige Reihe von Lagen erhalten und die Werte ändern sich von Lage zu Lage in stetiger Weise. Zwischen den beiden extremen Lagen muß eine Lage sein, wo A das Übergewicht eben zu erlangen, B eben zu verlieren im Begriffe ist ... Eine Lage, welche dauert, ist immer eine Lage des Gleichgewichts. In einer solchen Lage kommen nur Umformungen vor, welche das Gleichgewicht nicht stören."[29] Klaus glaubt hier, eine Beschreibung des Sattelpunkt genannten Gleichgewichts zu erkennen, das bei Zwei-Personen-Spielen in gemischten Strategien den Minimax-Wert bestimmt. In der Tat wäre ohne gemischte Strategien jeder Hinweis auf stetige Phänomene sinnlos, da solche ein Kontinuum voraussetzen, das bei einer endlichen Zahl von Strategien nicht gegeben ist. Allerdings ist es mehr als fraglich, ob Lasker bereits für beide Spieler gemischte, also zufällig variierte, Strategien in Betracht gezogen hat. Deutlich wird dies bereits in den von Klaus zitierten Überlegungen Laskers über einen ideal agierenden Spieler, den Lasker *Macheïde* nennt: „Beispielsweise weiß kein ehrlicher Kartenspieler die Verteilung der Karten voraus, dennoch aber ist das Kartenspiel ein Kampf und man darf dabei, ohne der Sache Gewalt anzutun, von zweckmäßigen und unzweckmäßigen Spielweisen reden ... Demnach kann der Macheide nicht, wenigstens nicht im allgemeinen, den Verlauf des Kampfes vorhersehen. Dennoch aber ist sein Entschluß eindeutig bestimmt. In jeder Lage faßt er einen eindeutigen Entschluß ..."[30]

Eine neuere Rezeption von Laskers Beiträgen zur Spieltheorie stammt von Robert Leonard.[31] Leonard verweist unter anderem auch darauf, dass Las-

[28] Bernd Gräfrath (Fn 1), S. 250.
[29] Klaus (Fn 5), S. 983.
[30] Klaus (Fn 5), S. 982.
[31] Leonard (Fn 7), insbesondere S. 9–29. Ferner Bewersdorff (Fn 7), S. 174–183, 162–168.

ker nicht zuletzt durch sein Studium 1890/91 in Göttingen, das zu jener Zeit gerade seinen Aufstieg zum Weltzentrum der Mathematik begann, und seine späteren algebraischen Arbeiten, die später von der Tochter Emmy[32] seines Doktorvaters Max Noether zum Satz von Lasker-Noether verallgemeinert wurden, bestens vernetzt war mit herausragenden Köpfen der im Vergleich zu heute deutlich kleineren mathematischen Community. Zu erwähnen sind insbesondere Laskers Kontakte zu David Hilbert, Edmund Landau, Adolf Hurwitz und Otto Toeplitz.[33] Ebenso weilte der bereits erwähnte Ernst Zermelo ab 1897 für ein Jahrzehnt in Göttingen und es ist aus späterer Zeit, nämlich 1929, ein Brief Laskers an Zermelo bekannt, in dem es um einen Vorschlag für eine Wertungszahl für die Spielstärke von Schachspielern ging.[34] Es könnte daher sehr gut sein, dass die hier im ersten Teil referierten Vorstufen der mathematischen Spieltheorie auch Lasker teilweise zur Kenntnis gelangten.[35]

Lasker über Baccarat

In seinen beiden, 1929 erschienen, weitgehend, aber nicht vollständig inhaltsgleichen Büchern *Encyclopedia of Games, Volume I, Card Strategy* und *Das verständige Kartenspiel*[36] stellt Lasker zum Teil umfangreiche Berechnungen über Kartenspiele an. Dabei übersteigt das Niveau einiger Passagen deutlich die eigentlich populärwissenschaftliche Darstellung Laskers. Er merkt dazu an: „[Ich] habe … hier und da Formeln angegeben, aber der Geist dieser Formeln ist hier nirgends in der mathematischen Bezeichnung, welche nur wenige kennen, sondern in einer Kraft der Anwendung, die hier breit und allgemeinverständlich merkbar gemacht wird, begründet.“[37] Angewendet werden insbesondere elementare Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung: „Von allen Risiken, die ihm [dem Spieler] offenstehen, muß der gute Spieler das nach der Wahrscheinlichkeit ihm vorteilhafteste laufen.“[38] Neben kombinatorischen Überlegungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, insbesondere für Kartenkombinationen, finden sich in den beiden Büchern einige Berechnungen, an Hand derer Laskers

[32] Zu Emmy Noethers Schülern gehörte auch B. L. van der Waerden (siehe Fn 21), der von ihr früh auf Laskers Ergebnisse aufmerksam gemacht wurde. Siehe Bartel L. van der Waerden, *„Meine Göttinger Lehrjahre“*, Mitteilungen der DMV, **5** (1997), Heft 2, S. 20–27.

[33] Zu weiteren Kontakten Laskers siehe Joachim Rosenthal (Fn 2).

[34] Mark E. *Glickman, Introductory note to 1928*, in: Ernst Zermelo, *Collected Works*, Volume II, S. 616–621, dort S. 620. Faksimile in Rosenthal (Fn 2), S. 228.

[35] Andererseits darf man nicht verkennen, dass die ersten spieltheoretischen Überlegungen mathematische Randthemen waren. Auch der Mathematiker und Schachweltmeister Max Euwe schreibt in einer Veröffentlichung von 1929, dass er erst nach deren Abschluss durch John von Neumann auf Zermelos Arbeit (Fn 10) hingewiesen worden sei: Max Euwe, *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, **32** (1929), S. 633–642.

[36] Erschienen in New York bzw. Berlin. Das Vorwort der amerikanischen Ausgabe ist mit 5. November 1928 datiert, das Vorwort der deutschen Ausgabe mit Juni 1929.

[37] *Das verständige Kartenspiel*, S. 10.

[38] *Das verständige Kartenspiel*, S. 31 f., *Encyclopedia of Games*, S. 33 f. [“Of all risks open to him the player hast to choose the most advantageous. The calculus of probabilities serves to discover that risk among the multitude of possibilities.”]

Kenntnisse und Erkenntnisse über spieltheoretische Zusammenhänge gut eingeschätzt werden können.

Die ersten, im Detail nur in der deutschen Ausgabe dargelegten Berechnungen gelten einer vereinfachten Version des in Casinos gespielten Kartenspiels Baccarat. Beim Baccarat spielen zwei Spieler darum, wer mit zwei oder drei Karten den höchsten Einer bei der Summe seiner Kartenwerte erzielt. Bei der Wertung zählt ein Ass als 1, Zwei bis Zehn zählen jeweils ihrem Wert entsprechend und jedes Bild zählt als 10, das entspricht dem Wert 0, weil es nur auf den Einer ankommt. Das Spiel beginnt damit, dass beide Spieler zwei Karten erhalten, die für den Gegner nicht einsehbar sind – bei Laskers vereinfachter Version wird nur je eine Karte ausgeteilt. Hat derart einer der beiden Spieler mindestens den Wert 8 erzielt, wird das Spiel vorzeitig abgebrochen, und es kommt zur sofortigen Abrechnung. Andernfalls, das heißt, wenn beide Spieler Werte zwischen 0 und 7 halten, erhält jeder der beiden Spieler das optionale Angebot, eine weitere Karte zu ziehen. Es beginnt der Spieler, der nicht gegeben hat und der *Ponte*[39] genannt wird. Zieht er eine weitere Karte, muss er diese offen hinlegen. Anschließend ist es am Gegenspieler, der als *Bank*[40] fungiert, ebenfalls darüber zu entscheiden, ob er eine weitere Karte ziehen möchte. Selbstverständlich ist es dabei für ihn vorteilhaft, die ihm zugängliche Information zu berücksichtigen. Diese Information umfasst entweder die optionale, offen liegende Karte des Ponte oder das Wissen darüber, dass der Ponte auf eine weitere Karte verzichtet hat, was tendenziell auf ein gutes Blatt des Ponte hinweist.

Lasker begründet zunächst, dass der Ponte bei Werten bis zu 4 noch eine Karte ziehen sollte und bei Werten ab 6 nicht mehr.[41] Schwieriger zu beantworten ist die Frage, welche Entscheidung beim Wert 5 für den Ponte die aussichtsreichste ist. Diesbezüglich hatte Joseph Bertrand bereits 1889 auf Basis von aufwändigen Berechnungen festgestellt, dass die beiden Entscheidungen einerseits des Ponte über das Ziehen beim Wert 5 und andererseits der Bank über das Ziehen beim Wert 6, sofern der Ponte zuvor keine weitere Karte gezogen hat, nicht eindeutig bewertbar sind – anders als bei allen anderen Entscheidungen im Spiel. Wie beim Spiel Schere-Stein-Papier kann nämlich die Frage, ob in einer dieser beiden Situationen eine weitere Karte vorteilhaft ist, nur dann beantwortet werden, wenn man weiß, wie der Gegner sich in der jeweils anderen Entscheidungssituation verhält.[42]

Lasker scheint Bertrands Ergebnisse nicht gekannt zu haben. Als Literatur explizit erwähnt er ausschließlich, und zwar nur im Vorwort der amerikanischen Ausgabe, das Standardwerk über Spielregeln von Karten- und Brettspielen *Hoyle*,[43] das nach seiner Begründung durch Edmond Hoyle im 18. Jahrhundert bis heute in immer neuen Bearbeitungen erschienen ist.

Zum Problem, wie sich der Ponte beim Wert 5 am besten entscheidet, sind Laskers Darlegungen in der deutschen Ausgabe argumentativ nicht völlig

[39] Bei Lasker *Spieler* bzw. *pone*.
[40] Bei Lasker *Geber* bzw. *dealer*.
[41] *Das verständige Kartenspiel*, S. 37 f., *Encyclopedia of Games*, S. 42.
[42] Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités*, Paris 1889. S. 38–42. Diese Untersuchung Bertrands diente übrigens drei Jahrzehnte später Borel als Beispiel für seine Überlegungen (Borel 1923, Fn 9).
[43] *Encyclopedia of Games*, S. ix–x.

schlüssig.[44] Hervorzuheben ist aber, dass er völlig zu Recht auf den „psychologischen Faktor“[45] bei der Entscheidung des Ponte beim Wert 5 hinweist, „wo sein Interesse ihm keinen Rat gibt, wo also seine Laune oder Willkür entscheidet“.[46] Laskers Ansatz für dieses Problem entspricht einer gemischten Strategie des Ponte, wobei Lasker aus Sicht des Bankhalters davon ausgeht, dass dieser die variierte Spielweise des Ponte mittels einer Beobachtung im Rahmen einer Partiesequenz entschlüsseln kann: „Hat …[der Ponte] in hundert solchen Fällen sich sechzigmal für Kaufen entschieden und vierzigmal für Nichtkaufen, so darf man die Wahrscheinlichkeit, daß er in solchen Fällen kauft, mit drei Fünftel ansetzen.“[47] Basierend auf einer solchen Annahme kann man, wie immer auch die Annahme quantitativ ausfällt, mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Berechnungen, die Lasker beispielhaft für die genannte Annahme beschreibt, die optimale Verhaltensweise der Bank berechnen.

Diese allgemein mögliche Verfahrensweise könnte sogar in Form eines parametrisierten Ansatzes formuliert werden. Als Basis fungiert ein unbekannter Parameter p, der für die Wahrscheinlichkeit steht, dass der Ponte beim Wert 5 eine weitere Karte zieht. Derart könnte sogar der von Bertrand nicht gänzlich gelöste Fall berechnet werden, wenn die Bank den Wert 6 hält und der Ponte zuvor keine weitere Karte gezogen hat. In diesem Fall kann der Ponte nur einen der Werte 5, 6 oder 7 halten, weil er bei niedrigeren Werten gezogen und bei 8 sowie 9 aufgedeckt hätte. Außerdem sind die drei Werte 5, 6 und 7 kurz zuvor, nämlich zum Zeitpunkt der Entscheidung des Ponte, gleichwahrscheinlich,[48] wobei allerdings der Ponte beim Kartenwert 5 nach der gemachten Annahme mit der Wahrscheinlichkeit p eine weitere Karte zieht. Bedingt zu der hier zu untersuchenden Entscheidungssituation der Bank, bei der der Ponte zuvor *keine* weitere Karte gezogen hat, stehen damit die Wahrscheinlichkeiten für die drei Werte 5, 6 und 7 des Ponte im Verhältnis $(1 - p) : 1 : 1$ zueinander. Nun kann man, analog zu den von Lasker berechneten Beispielen, untersuchen, wie eine weitere Karte der Bank die Gewinnchancen *verändert*. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse. Die Veränderungen der Gewinnhöhe, für die in den letzten fünf Spalten die Wahrscheinlichkeiten angegeben sind, werden bestimmt durch die Werte, die sich ausgehend von einem Wert 6 der Bank durch eine weitere Karte ergeben:

[44] *Das verständige Kartenspiel*, S. 38: „Zu einer 5 zu kaufen, wäre weder ratsam noch fehlerhaft, da beim Kauf von 0, 1, 2, 3, 4 keine Verschlechterung eintritt, also genau die Hälfte der Fälle nicht ungünstig ist.“ In Wahrheit sind die Wahrscheinlichkeiten gleich 4/13 für eine Verbesserung, 5/13 für eine Verschlechterung und 4/13 für die Invarianz.

[45] *Das verständige Kartenspiel*, S. 40 f. Inhaltlich abweichende Ausführungen findet man in *Encyclopedia of Games*, S. 43 [“Under these conditions the pone, holding a five has no inducement to buy a card”].

[46] *Das verständige Kartenspiel*, S. 41.

[47] *Das verständige Kartenspiel*, S. 41.

[48] Bei Laskers vereinfachter Baccarat-Version, bei der jeder Spieler zunächst nur eine Karte erhält, ist diese Gleichheit offensichtlich. Die drei Wahrscheinlichkeiten sind dann nämlich gleich 1/13. Die Gleichheit gilt aber auch für das hier beschriebene „richtige“ Baccarat, für das die drei Wahrscheinlichkeiten übereinstimmend gleich 16/169 sind.

Wert des Ponte	bedingte Wahrscheinlichkeit	Gewinn der Bank ohne Ziehen	Wahrscheinlichkeit für Veränderung der Gewinnhöhe um ... 2	1	0	-1	-2
5	$\frac{1-p}{3-p}$	1			$\frac{7}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$
6	$\frac{1}{3-p}$	0		$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	
7	$\frac{1}{3-p}$	-1	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{10}{13}$		

Damit verändert sich in der zu untersuchenden Situation, wenn die Bank den Wert 6 hält und der Ponte zuvor keine weitere Karte gezogen hat, die Gewinnerwartung beim Ziehen einer weiteren Karte um

$$\tfrac{1}{3-p}\Big((1-p)(-\tfrac{1}{13}-\tfrac{2\cdot 5}{13})+(\tfrac{3}{13}-\tfrac{6}{13}+\tfrac{2\cdot 2}{13}+\tfrac{1}{13})\Big)=\tfrac{1}{3-p}(\tfrac{11}{13}p-\tfrac{9}{13}).$$

Daher könnte der Ponte mit einer gemischten Strategie, bei der er beim Kartenwert 5 mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 9/11$ eine weitere Karte zieht, verhindern, dass die Bank mit ihrer Entscheidung beim Wert 6 nach einem Nicht-Ziehen des Pontes einen positiven Einfluss nehmen kann. Dies ist übrigens genau derjenige Wert, der erstmals 1957 veröffentlicht wurde.[49] Von Neumann hatte zwar 1928 eine Analyse des Baccarat angekündigt, diese aber nie publiziert.[50]

Resümierend bleibt festzuhalten, dass es Laskers Ansatz erlaubt hätte, den Minimax-Wert des Baccarat zu berechnen. Allerdings ist Laskers Sichtweise keinesfalls spieltheoretisch. Dafür wäre es nämlich erforderlich, beide Spieler gleichberechtigt zu untersuchen und dabei insbesondere für beide Spieler gemischte Strategien in Betracht zu ziehen. Das macht Lasker aber definitiv nicht. Sein Ansatz, dem Ponte als dem zuerst agierenden Spieler eine gemischte Strategie zu unterstellen, die die nachfolgend ziehende Bank aufgrund einer „Beobachtung“[51] innerhalb einer Partiesequenz kennt, dient einzig einem methodischen Zweck. Auf diese Weise wird unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Verfahrensweise möglich, wie sie von Brettspielen wie Schach und Backgammon bekannt ist. Dazu wird die Bewertung der untersuchten Positionen umgekehrt zur Spielchronologie vorgenommen, wobei in Laskers Worten „nach größtem Vorteil beziehungsweise kleinstem Nachteil zu handeln [ist] … Die Art, wie ein Spieler unter Entschlüssen, die ihm gleichen Vorteil gewähren, die Wahl trifft, ist durch Beobachtung vieler Fälle festzustellen und wiederum durch Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verwerten.“[52]

Es bleibt noch anzumerken, dass Lasker im Rahmen seiner Baccarat-Analyse darauf aufmerksam macht, dass sich die Wahrscheinlichkeiten beim Verbrauch des Kartendecks ändern. Sind „mehr hohe als niedrige Karten verteilt … worden …, so lohnt es sich natürlich [für den Ponte], nunmehr zu einer 5 zu kaufen.“[53] Natürlich war Lasker weit entfernt von

---

[49] John G. Kemeny, J. Laurie Snell, *Game-theoretic solution of baccarat*, The American Mathematical Monthly, **64** (1957), S. 465–469.
[50] John von Neumann (Fn 8), S. 320.
[51] *Das verständige Kartenspiel*, S. 41.
[52] *Das verständige Kartenspiel*, S. 41.
[53] *Das verständige Kartenspiel*, S. 38, ähnlich *Encyclopedia of Games*, S. 43 [”Of course, the hypothesis of his reasoning is that the pack contains an exceedingly large number of cards and that the denominations are equally distributed. When some denominations are more numerous than others, the probability of drawing a card of a former kind is superior to that of

den Möglichkeiten eines programmierbaren Rechners, mit dem Edward Thorp 1961 spektakulär das Black Jack in amerikanischen Casinos „knackte“, indem er abhängig von den bereits ausgespielten Karten eine optimale Strategie bestimmte.[54]

Lasker über Poker

In den beiden genannten Büchern widmet Lasker jeweils ein Kapitel dem Pokerspiel. Wieder argumentiert er in ausgeprägt mathematischer Weise. Sein Ziel ist es, „die Grundsätze, auf denen die richtige Strategie des Kartenspiels beruht, einzeln und der Reihe nach auseinandersetzen zu können“.[55] Konkret analysiert Lasker mehrere Varianten eines stark vereinfachten Zwei-Personen-Pokerspiels, das er *Pokerett* nennt. Eine Untersuchung einer solchen Pokervariante mit „schematisierten Vereinfachungen“ hatte bereits ein Jahr zuvor John von Neumann in seiner Veröffentlichung für einen „demnächst“ erscheinenden Nachtrag angekündigt, um damit die „Notwendigkeit des ‚Bluffens‘ beim Poker“ zu beweisen.[56] Dieses Vorhaben realisierte von Neumann aber erst 1944 im Rahmen seiner mit Morgenstern verfassten Monographie.[57] Insofern ist Lasker, auch wenn seine Ergebnisse über Poker noch unvollständiger blieben als beim Baccarat, ein Pionier beim Versuch, die Notwendigkeit des Bluffens beim Pokern systematisch zu erklären.

Die Pokerett-Variante, an Hand deren Lasker insbesondere Bluffs erläutert, verlaufen nach den folgenden Regeln: Zwei Kontrahenten, nachfolgend *Geber* und *Spieler* genannt, spielen mit einem Kartendeck, das je nach Variante 13 oder 20 Karten umfasst, die mit den Zahlen von 1 bis 13 (20) gekennzeichnet sind. Der Geber gibt zunächst dem Spieler und dann sich selbst verdeckt eine Karte. Nachdem sich jeder der beiden Kontrahenten seine Karte angesehen hat, leistet der Geber den Grundeinsatz in der Höhe 1. Der Spieler muss nun entweder passen oder mit dem Betrag 2 eröffnen. Nach einer Eröffnung durch den Spieler kann der Geber passen, den Betrag 1 zum Sehen nachsetzen oder mit dem Betrag 2 auf das Gesamtgebot 3 erhöhen, wobei im letztgenannten Fall der Spieler entweder passen kann oder eine Einheit zum Sehen nachsetzen muss. Beim Sehen, das heißt dem auch *Showdown* genannten Abschluss der Bietphase mit beidseits gleich hohen Gesamtgeboten, gewinnt derjenige, der den höheren Kartenwert auf seiner Hand hält. Passt einer er beiden Kontrahenten, gewinnt sein Gegner alle getätigten Einsätze.

Im folgenden Diagramm ist der Spielablauf graphisch dargestellt.[58] Das Spiel verläuft von oben nach unten, so dass das oberste Level der Karten-

---

drawing a card of the latter kind, and the result may be to change the strategy of the pone, as is easily seen.”]

[54] Edward Thorp, *A favorable strategy for twenty-one*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **47** (1961), S. 110–112. Überblick in Bewersdorff (Fn 7), S. 121–134.

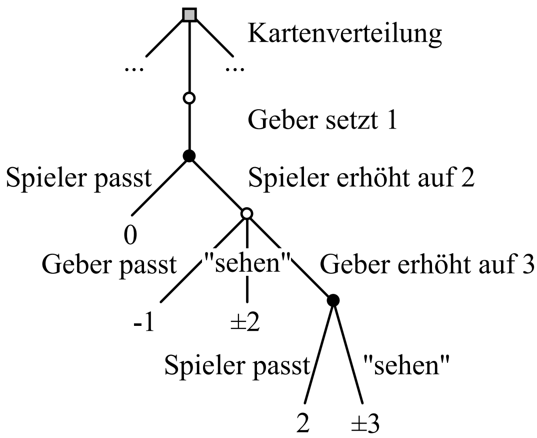
[55] *Das verständige Kartenspiel*, S. 161.

[56] John von Neumann (Fn 8), S. 320.

[57] John von Neumann, Oskar Morgenstern, *Game theory and economic behavior*, Princeton ^{2}1953, S. 186–219.

[58] *Das verständige Kartenspiel* enthält Erörterungen zu vier Zwei-Personen-Pokerett-Varianten: S. 161–164 (13 Karten), S. 164–165 (20 Karten), S. 165–167 (13 Karten), S. 167–172 (20 Karten). *Encyclopedia of Games* beinhaltet Erörterungen von drei Zwei-Personen-Pokerett-Varianten: S. 87–92

verteilung entspricht. Von den $13 \cdot 12 = 156$ beziehungsweise $20 \cdot 19 = 380$ möglichen Kombinationen der beiden ausgeteilten Spielkarten ist exemplarisch nur eine graphisch dargestellt. Es folgen die Entscheidungen des Gebers und des Spielers in den als „○“ beziehungsweise „●“ dargestellten Punkten, die *Knoten* genannt werden. An den Enden der Spielverläufe stehen dann die Gewinne für den Spieler. Die mit „±2“ und „±3“ gekennzeichneten Endknoten entsprechen Showdowns, bei denen sich das Vorzeichen danach richtet, wer den höheren Kartenwert in Händen hält. Das heißt, die beiden Vorzeichen werden durch den Ast des obersten Levels bestimmt. Die Linien zwischen den Knoten, *Kanten* genannt, korrespondieren mit den Entscheidungen und sind entsprechend gekennzeichnet. Die Benennung „sehen“ steht als Kurzform für „Geber legt nach zum Sehen“ beziehungsweise „Spieler legt nach zum Sehen“.



Im Gegensatz zum Baccarat, bei dem Lasker einzelne Spielsituationen isoliert untersucht, macht er beim Pokerett für die zu optimierende Spielweise zunächst einen globalen Ansatz, wie es auch in der Spieltheorie üblich ist. Für Lasker „kann man keineswegs in Nachteil geraten“, wenn man „seinem Gegner ein planmäßiges Spiel unterstellt …, denn planloses Spiel ist weniger wirksam, ist schwächer, also weniger erfolgreich als das planvolle, zumindest auf Dauer.“ Konkretisiert wird das planmäßige Spiel des Gegners in Gestalt eines „Plan[s] …, der sich auf die Stärke seiner Hand gründet“.[59] Mit dieser Charakterisierung erscheint der Begriff des *Plans* als ein Äquivalent zum spieltheoretischen Terminus der *Strategie*, also als eine umfassende Handlungsanweisung, die für jede Entscheidungssituation eine am aktuellen Informationsstand ausgerichtete Handlungsoption beinhaltet.

Allerdings verwendet Lasker selbst auch den Begriff der *Strategie*, und zwar sehr konkret und de facto synonym zu seinem Begriff des *Plans*: „Ist die Strategie des Spielers bekannt, so folgt daraus die beste Antwort des Gebers sehr einfach. Beispielsweise: weiß der Geber, daß der Spieler nur mit 11 eröffnet, so wird er mit einer 12 sehen, da er mit dem Risiko eines Chips deren drei gewinnen kann, er wird mit einer 13 erhöhen, sonst aber

(13 Karten), S. 92–96 (20 Karten), S. 96–102 (20 Karten). Die dritte Variante der deutschen Ausgabe und die ersten beiden Varianten der amerikanischen Ausgabe entsprechen dem Diagramm. Bei den ersten beiden Varianten der deutschen Ausgabe muss der Spieler zum Sehen nachlegen. Bei den jeweils letzten Varianten hat der Geber vier Optionen, da er auch um 2 erhöhen kann.

[59] *Das verständige Kartenspiel*, S. 167.

immer passen."[60] Überhaupt ist die Berechnung von optimalen Erwiderungen ein zentraler Punkt in Laskers Überlegungen: „Um die beste Strategie des Spielers zu finden, dient der vollständige Versuch. Er besteht darin, dass man alle möglichen strategischen Richtlinien aufzählt, die der Spieler befolgen kann, und deren Ergebnisse, sinngemäß zu Ende geführt, berechnet. Diejenige Richtlinie wird angezeigt, die das beste Ergebnis liefert."[61]

Für die erste in der deutschen Ausgabe untersuchten Pokerett-Variante glaubt Lasker, für den Spieler einzig solche Strategien in Betracht ziehen zu müssen, bei denen er unterhalb eines Wert *n* passt und ab dem Wert *n* erhöht. Eine strenge Prüfung, ob diese Reduktion bei den Strategien des Spielers zulässig ist, unterbleibt. Dazu müsste jede andere Strategie von einer der fokussierten Strategien im spieltheoretischen Sinn dominiert werden.[62] Lasker charakterisiert die von ihm ausgeblendeten Spielweisen als „[p]athologisches, das heißt planloses oder willkürliches oder launisches oder eigensinniges Spiel", das sich „bei einer genügend großen Zahl von Partien bei richtiger Antwort immer zum Verlust führen" würde.[63]

Bei der Berechnung optimaler Erwiderungen des Gebers geht Lasker analog zu seiner Baccarat-Analyse davon aus, dass der Geber die relative Häufigkeit, mit der der Spieler eröffnet, durch Beobachtung im Rahmen einer Partiesequenz kennt. Der Geber kann daher auf die Strategie des Spielers schließen[64] und somit die beste Erwiderung berechnen. Anschließend optimiert Lasker völlig korrekt die Strategie des Spielers Minimax-mäßig unter der Annahme einer besten Antwort des Gebers. Für seine erste Pokerett-Variante mit 13 Kartenwerten findet Lasker, dass die „beste Strategie des Spielers darin besteht, von der 9 aufwärts zu wetten, worauf der Geber am besten tut",[65] den eigenen Kartenwert 11 zum Sehen zu bringen und ab 12 sogar zu erhöhen. Ein Sehen bei 10 ist ebenso wie ein Erhöhen bei 11 ohne Veränderung der Chancen möglich. Der Minimax-Wert des Spielers in Bezug auf die von Lasker getroffene Auswahl von Strategien beträgt damit 30/13/12 = 0,1923. Übrigens ergibt sich dieser Wert auch in einer vollständigen Analyse des Spiels als Minimax-Wert: Der Spieler sollte dazu von 9 aufwärts wetten und der Geber ab 11 erhöhen und darunter passen. Insbesondere bedarf es bei dieser Pokerett-Variante keiner gemischten Strategien und keiner Bluffs.

Um Bluffs an Hand der im Diagramm dargestellten Pokerett-Variante zu analysieren, erweitert Lasker seinen Fokus vom – in seinen Worten – „normalen Spiel" auf die „Inversion". Lasker erläutert: „Beim normalen Spiel wettet man den höheren Betrag auf die höhere Hand, bei der Inversion

[60] *Das verständige Kartenspiel*, S. 162. Das Zitat bezieht sich auf die erste Pokerett-Variante mit einem Kartenblatt aus 13 Karten.

[61] *Das verständige Kartenspiel*, S. 162, ähnlich *Encyclopedia of Games*, S. 89 ["To determine the best method of counter-play we employ what I call the complete trial. It consists in enumerating all possible systems of counter-play, in calculating their probable results and in selecting the system yielding then most profitable probable result."]

[62] Eine Strategie eines Spielers dominiert eine andere, wenn sie für den betreffenden Spieler nie zu einem ungünstigeren Ergebnis führt, egal, wie sich die anderen Mitspieler verhalten.

[63] *Das verständige Kartenspiel*, S. 164.

[64] Die von Lasker einzig betrachteten Strategien der Form „Eröffnen beim Wert *n* oder besser" werden durch diese Häufigkeit eindeutig charakterisiert.

[65] *Das verständige Kartenspiel*, S. 164.

umgekehrt den höheren Betrag auf die niedrigere Hand, den niedrigeren Betrag auf die höhere Hand."[66] Dabei zieht Lasker auch gemischte Strategien ins Kalkül: „Bei Pokerett wie allen Pokerspielen überhaupt handelt es sich nie darum, daß ein Spieler eine gewisse Taktik befolgt, sondern immer nur darum, mit welcher Wahrscheinlichkeit er sie befolgt. Der Prozentsatz der Fälle, wo er sich in einer gewissen Situation auf eine gewisse Art benimmt, ist das Entscheidende."[67] Noch deutlicher als beim Baccarat, wo es pro Spieler de facto jeweils nur eine Situation gibt, die einer zufälligen Entscheidung bedarf, erkennt man beim Pokerett, dass Lasker eigentlich keine gemischten Strategien, sondern Verhaltensstrategien[68] vor Augen hat. Dies ist natürlich aus Sicht der Spielpraxis viel naheliegender und bei den von Lasker betrachteten Spielen ein äquivalenter Ansatz.

Lasker ist bewusst, dass seine Ausführungen für die breite Leserschaft, an die sich sein Spielebuch richtet, keine leichte Kost sind. Diesbezüglich merkt er an: „Es folgt hier nun eine Rechnung, die ein wenig mathematischer Art ist. Ich würde, wenn ich sie hier nicht ausführte, meine Pflicht nicht erfüllen, denn ich behaupte hier etwas, das strenger Kritik Stand halten muß, und da muß, wer es ernst mit den Dingen meint, offen seine Karten hinlegen, auf daß der Kritiker hineinschauen könne und bedeuten: hier hast du dich versehen; oder aber: du hast recht."[69]

Laskers Überlegungen sind aus spieltheoretischer Sicht nur zum Teil stichhaltig. Dass sie darüber hinaus unvollständig bleiben, ist allerdings nicht verwunderlich, da selbst bei Kenntnis der spieltheoretischen Grundlagen eine Berechnung des Minimax-Wertes des Pokerett mit 13 oder mehr Karten ohne Computer de facto unmöglich ist. Auf jeden Fall zu würdigen ist Laskers Ansatz, vereinfachte Modelle des Poker zur Erklärung von Bluffs zu verwenden. Noch bemerkenswerter ist, dass einige zentrale Aspekte über Zwei-Personen-Spiele in Laskers Analyse zu finden sind: Strategien, Verhaltensstrategien und die Berechnung der besten Antwort auf eine gegnerische Strategie.

Experimentelle Spielanalyse

Einen bemerkenswerten Ansatz zur Analyse eines Brettspiels mit Zufallseinfluss findet man in Laskers 1931 erschienenem Buch *Brettspiele der Völker*.[70] In einem Kapitel *Puff und Tric-Trac* widmet sich Lasker einem Brettspiel, das weitestgehend dem noch heute sehr populären *Backgammon* entspricht. Laskers Fokus ist auf Endspielpositionen gerichtet: „Die Erwägung, wie die rechte Spielweise zu finden sei, hat mit der Betrachtung des Endes der Partie zu beginnen. Setzen wir den einfachen Fall, die Steine seien im Endquartier versammelt und es handle sich im Wesentlichen nur noch darum, sie herauszunehmen. Wie viel Würfe werden je nach Stellung

[66] *Das verständige Kartenspiel*, S. 168.
[67] *Das verständige Kartenspiel*, S. 169.
[68] Bei Verhaltensstrategien wird jede einzelne Zugentscheidung für sich zufällig ausgelost. Dieses Konzept ist praxisgerechter als der auf rein theoretische Überlegungen zielende Ansatz gemischter Strategien, bei denen mit einer einzigen Zufallsentscheidung eine vollständige Handlungsanweisung für das gesamte Spiel bestimmt wird, die dann für *jede* mögliche Entscheidungssituation des betreffenden Spielers einen Zug umfasst. Siehe Bewersdorff (Fn 7), S. 419–428.
[69] *Das verständige Kartenspiel*, S. 170.
[70] Emanuel Lasker, *Brettspiele der Völker*, Berlin 1931.

der Steine dazu erforderlich sein?“[71] Laskers präsentiert an Beispielen von relativ einfachen Stellungen, etwa in Form von 15 Steinen auf dem letzten Feld, Techniken, mit denen die durchschnittliche Zuganzahl bis zum Spielende abgeschätzt werden kann. Seine Darlegung ist entsprechend der anvisierten Leserschaft populärwissenschaftlich gehalten. In diesen Kontext passend, und trotzdem sehr bemerkenswert, ist eine Anmerkung Laskers zu Methoden, die auch in komplizierten Fällen angewendet werden können: „Einzelne der obigen Zahlenwerte habe ich geschätzt und ich rate meinen Lesern, sie zu kontrollieren, indem sie Versuche machen. Es ist überhaupt eine gute Methode. Die sicherste Autorität ist neben der zwingenden Deduktion der eigene Versuch. Es ist für Forscher kein schlimmes Verbrechen, in Einzelfragen seinem Urteil zu folgen und dabei Fehler zu begehen, sofern er sich in nur in wesentlichen Punkten der äußersten Gewissenhaftigkeit befleißigt … Mit einem großen mathematischen Apparat ließen sich ja diese Fragen bis auf Tüpfelchen über dem I erledigen, aber für den Spieler ist es ratsamer, sich der Methode zu bedienen, die im Leben von Nutzen ist, und da ist es weniger die mathematische als die statistische Methode der Beobachtung, die er sich anzuzüchten hat.“ [72]

Natürlich ist es mehr als naheliegend, komplizierte wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme mittels Versuchsreihen zu lösen. Schließlich erhielt die Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. Jahrhundert ihre ersten Impulse aus dem umgekehrten Interesse heraus, nämlich auf der Suche nach Methoden, mit der Gewinnchancen in Glücksspielen *berechnet* werden können. Diese Methoden und ihre Grundlagen in Form diverser Varianten des sogenannten *Gesetzes der großen Zahlen* erlauben es ebenso umgekehrt, Aussagen darüber herzuleiten, wie genau und wie sicher empirisch beobachtete Ergebnisse in Versuchsreihen vom wahrscheinlichkeitstheoretisch exakten Wert abweichen.

Dass die Technik von empirisch ausgewerteten Simulationen systematisch erst ab 1946 eingesetzt wurde, hat im Wesentlichen zwei Gründe: Zum einen standen erst ab dieser Zeit programmierbare Rechner zur Verfügung, wenn auch zunächst nur an einigen wenigen Forschungszentren. Zum anderen ergaben sich bei der Entwicklung neuer Nuklearwaffen viele komplexe Probleme, die mit zufallsabhängigen Computersimulationen zumindest näherungsweise gelöst werden konnten. Hauptinitiator dieser sogenannten Monte-Carlo-Methoden war der in Los Alamos tätige Stanislaw Ulam, der dazu mit John von Neumann in engem Austausch stand. Ulam erinnerte sich später, dass ihm die Idee zu dieser Methode 1946 während einer krankheitsbedingten Auszeit gekommen sei, als er sich mit der Gewinnwahrscheinlichkeit beim Kartenspiel Canfield Solitaire beschäftigt habe.[73]

Selbstverständlich wäre es nicht gerechtfertigt, Lasker eine Priorität im Hinblick auf die Entwicklung von Monte-Carlo-Methoden zubilligen zu wollen. Trotzdem verdient es Laskers Bemerkung, dokumentiert zu werden, zumal auch Ulams spätere Inspiration im spielerischen Umfeld erfolgte.

Einen Vorschlag für eine experimentelle Analyse macht Lasker ebenfalls bei dem von ihm ersonnenen Kartenspiel *Whistlett*. Bei diesem Stichspiel für vier Personen, bei dem die gegenüberliegenden Personen zusammen-

[71] *Das verständige Kartenspiel*, S. 237.
[72] Lasker (Fn 70), S. 239. Für den Hinweis auf diese Textstelle bedanke ich mich bei Ingo Althöfer.
[73] Roger Eckhardt, *Stanislaw Ulam, John von Neumann and the Monte Carlo method*, Los Almanos Science, Special Issue 1987, S. 131–141.

spielen, handelt es sich um ein vereinfachtes *Whist*, einen Urahn des *Bridge*. Whistlett zeichnet sich dadurch aus, dass es jeder Kartenwert nur einmal vorkommt und dass es keine Differenzierung nach Spielfarben gibt. Ansonsten spielt wie üblich jeweils derjenige Spieler aus, der den Stich zuvor gemacht hat, das ist derjenige Spieler, der die höchste Karte zum Stich beigesteuert hat. Wer am Schluss die meisten Stiche gemacht hat, gewinnt das Spiel.

Lasker empfiehlt die experimentelle Methode, um die Stärke eines bestimmten Whistlett-Kartenblattes zu bestimmen: „Beispielsweise vermag ich die Stärke einer Hand danach zu ermessen, daß ich die Hand vor mich hinlege und mir drei andere Spieler vorstelle, denen ich die übrigen dreißig Karten austeile, und nun probiere, wie viele Tricks bei bestem Spiel meine Partei nimmt; freilich oftmals austeile, 100mal oder 1000mal, bis ich mit Wahrscheinlichkeit annehmen kann, daß ich einen Durchschnitt erzielte habe, der nicht zufällig, sondern verläßlich ist.“[74]

Vollständige Analyse von kombinatorischen Spielen

Als kombinatorische Spiele werden Spiele mit perfekter Information bezeichnet, wenn sie keine Zufallselemente beinhalten. Ein etwas ungewöhnliches Beispiel dafür ist das Spiel *Whistlett* in der Zwei-Personen-Variante, sofern man nur den Part nach der Kartenverteilung betrachtet. Perfekte Information liegt deshalb vor, weil alle Karten verteilt werden und daher der Gegner zu Beginn genau diejenigen Karten hält, die man selbst nicht besitzt. Lasker analysiert an Hand einfachster Beispiele, wie viel Stiche ein Spieler abhängig von der Ausgangsverteilung erzielen kann.[75] Laskers Aufgabenstellung wurde später in verschiedenen Untersuchungen systematisch untersucht und zum Teil gelöst.[76]

Anfang der 1970er-Jahre begründete der Mathematiker John Horton Conway sogar eine eigenständige Disziplin der *Kombinatorischen Spieltheorie*, die eine Unterklasse von kombinatorischen Zwei-Personen-Spielen zum Gegenstand hat. Dabei wurde unter anderem eine bemerkenswerte Verbindung zwischen Spielen und Zahlen aufgedeckt, darunter auch exotischen Zahlen, die einen unendlich großen oder unendlich kleinen Charakter besitzen.[77]

Das einfachste Spiel, für das die Kombinatorische Spieltheorie eine vollständige Analyse beinhaltet, ist das Nim-Spiel. Dieses Spiel wird mit gleichförmigen Spielsteinen gespielt, die zu verschiedenen Haufen gruppiert sind. Beide Spieler ziehen abwechselnd und dürfen dabei jeweils be-

[74] Lasker (Fn 37), S. 88.
[75] Lasker (Fn 37), S. 81 f.
[76] J. Kahn, J. C. Lagarias, H. S. Witsenhausen, *Single-suit two-person card play*, drei Teile: International Journal of Game Theory, **16** (1987), S. 291–320; *II. Dominance*, Order, **5** (1988), S. 45–60; *III. The Misère Game*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **2** (1989), S. 329–343. J. Kahn, J. C. Lagarias, H. S. Witsenhausen, *On Lasker's card game*, in: *Differential Games and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **119**, 1989, S. 1–8.
[77] J. H. Conway, *On numbers and games*, London 1976. Einen Überblick gibt Bewersdorff (Fn 7), S. 169–261 sowie speziell auf Anwendungen für Schachendspiele Jörg Bewersdorff, *Schach aus spieltheoretischer Sicht*, KARL – das kulturelle Schachmagazin, **33**, Heft 2 (2016), S. 31–37.

liebig viele Steine von einem einzigen Haufen nehmen. Der Spieler, der den letzten Haufen abräumt, hat gewonnen.

Abgesehen davon, dass das Nim-Spiel nicht mit einem Remis enden kann, handelt es sich beim Nim-Spiel um ein *neutrales* Spiel. Das heißt, dass – anders als bei den meisten Brettspielen wie Schach – die Zugmöglichkeiten bei einer Position nicht davon abhängen, welcher der beiden Spieler gerade am Zug ist.

Für neutrale Spiele, die wie das Nim-Spiel nur gewonnen oder verloren werden können, kann die Klassifizierung der Positionen unabhängig vom Spieler durchgeführt werden. Das bedeutet, dass jede Position in Form einer Kombination von Haufen für den Anziehenden entweder eine *Gewinnstellung* oder eine *Verluststellung* ist. Diese Aufteilung der Stellungen war bereits Lasker vertraut. Er charakterisiert eine Verluststellung mit den Worten: „[W]er in dieser Lage anzieht, der verliert bei bestem Spiel."[78] Anders ausgedrückt: Von einer Verluststellung führt jeder erlaubte Zug zu einer Gewinnstellung, von der ausgehend dann der Gegner seinen Gewinn erzwingen kann. Solche Gewinnstellungen sind komplementär charakterisiert: „[D]er Anziehende produziert bei richtigem Spiel aus ihnen eine Verluststellung",[79] so dass der Nachziehende dann ausgehend von dieser Verluststellung keinen Gewinn für sich erzwingen kann.

Will man beim Nim-Spiel oder einem anderen neutralen Spiel, das nicht remis enden kann, wissen, zu welcher Kategorie eine konkrete Stellung gehört, so kann man diese Analyse im Prinzip immer rückwärts zur Spielchronologie durchführen. Man beginnt also mit Stellungen kurz vor Spielende. Verluststellungen fungieren quasi als „Zwischenziele",[80] die es zu erreichen gilt, um letztlich den Sieg, beim Nim-Spiel in Form vollständig abgeräumter Haufen, zu erreichen. Lasker erläutert weiter: „Können wir von einer Stellung, die wir untersuchen, durch einen erlaubten Zug zu einer Verluststellung übergehen, so ist die untersuchte Stellung eine Gewinnstellung; können wir dies nicht, so ist es eine Verluststellung. Ein Drittes gibt es hier nicht …"[81]

Lasker erläutert eine Formel, mit der sich speziell für das Nim-Spiel mit einer einfachen Berechnung direkt feststellen lässt, ob eine gegebene Stellung eine Verlust- oder Gewinnstellung ist.[82] Erstmals veröffentlicht wurde die Gewinnformel für Nim inklusive einem Beweis 1901 von dem Amerikaner Charles Leonard Bouton,[83] der kurz zuvor 1898 seinen zweijährigen Studienaufenthalt in Leipzig mit einer Promotion bei Sophus Lie abgeschlossen hatte. Bouton weist in seiner Arbeit darauf hin, dass die Formel empirisch und ohne Beweis von Paul E. More für eine Variante des Nim gefunden worden sei.[84] In Deutschland bekannt wurde die Gewinnformel des Nim

[78] Lasker (Fn 70), S. 176.
[79] Lasker (Fn 70), S. 177.
[80] Lasker (Fn 70), S. 172.
[81] Lasker (Fn 70), S. 177–178.
[82] Lasker verwendet allerdings die Bezeichnung *Nimm*. Lasker (Fn 70), S. 176.
[83] Bouton (Fn 11).
[84] Gemeint ist der Journalist und Literat Paul Elmer More. Siehe: Arthur Hazard Dakin, *A Paul Elmer More miscellany*, Portland 1950, II. 6, S. 183. Bei der Nim-Variante handelt es sich um die Misère-Version, bei der bei unveränderten Zugregeln der zuletzt ziehende Spieler *verliert*. Trotz des

vor allem durch drei Veröffentlichungen des Mathematikers Wilhelm Ahrens,[85] der Bouton in Leipzig kennen gelernt haben dürfte. Bei einer von Ahrens Veröffentlichungen handelt es sich um ein Buch über Unterhaltungsmathematik, das auch ein Kapitel über Laskers Brettspiel *Laska* enthält. Zumindest eine dieser Veröffentlichungen dürfte Lasker bekannt gewesen sein, wie eine Referenz von Lasker auf Ahrens in Bezug auf die Geschichte des Nim offenbart.[86] Auf Grund dieser Umstände ist es allerdings äußerst bemerkenswert, dass Lasker weder Bouton noch More erwähnt. Er schreibt, das „Genie" des Formel-Entdeckers habe „seinen Namen für sich zu behalten", es „hat es für gut befunden, sein Inkognito zu wahren."[87]

Die Gewinnformel für Nim charakterisiert eine aus mehreren Haufen bestehende Nim-Stellung genau dann als Verluststellung, wenn die übertragslose „Summe" der binär dargestellten Haufengrößen gleich 0 ist. Beispielsweise sind die beiden Stellungen 3–2–1 und 6–5–3 Verluststellungen. Hingegen ist 11–9–5 eine Gewinnstellung, da die übertragslose „Summe" der drei Binärzahlen 1011, 1001 und 101 gleich der Binärzahl 111, also gleich 7, ist:

```
1011   (11)
1001    (9)
0101    (5)
----
 111    (7)
```

Für Details wird auf die bereits angeführte Literatur verwiesen.

Nachdem Lasker die Formel ausführlich erläutert und einen Beweis für deren Richtigkeit gegeben hat, versucht Lasker, die Technik auf Spiele mit leicht modifizierten Regeln zu übertragen. Die erste dazu von Lasker erdachte Spielvariante trägt heute seinen Namen, nämlich *Laskers Nim*.[88] Bei diesem Spiel müssen bei einem Zug entweder beliebig viele Steine von einem Haufen genommen werden, oder ein Haufen kann in zwei Teile zerlegt werden, ohne dass dabei ein Stein entfernt wird.

Die mathematische Theorie für solche Nim-Varianten wurde wenige Jahre nach dem Erscheinen von *Brettspiele der Völker* unabhängig voneinander von dem Deutschen Roland Sprague und dem Engländer Patrick Michael Grundy gefunden.[89] All diesen Nim-Varianten gemein ist, dass derjenige

negierten Spielziels sind die Gewinnformeln für beide Versionen weitgehend identisch.

[85] *„Nim", ein amerikanisches Spiel mit mathematischer Theorie*, Naturwissenschaftliche Wochenschrift, Serie II, **1** (1901/02), S. 258–260. *Mathematische Spiele*, in: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band I, *Arithmetik und Algebra*, Teil 2, Leipzig 1904, S. 1080–1093. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Band I, Leipzig [2]1910, S. 72–79. Ferner wird die Gewinnformel für Nim in W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreations and essays*, London [9]1920, S. 21 erläutert.

[86] Lasker (Fn 70), S. 176.

[87] Lasker (Fn 70), S. 179. Siehe auch S. 180, 182.

[88] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, London 1982, S. 99.

[89] R. Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tôhuko Mathematical Journal, **41** (1935/6), S. 438–444 (einen kurzen Überblick gibt Sprague in seinem Buch *Unterhaltsame Mathematik*, Braunschweig 1961); P. M. Grundy, *Mathematics and games*, Eureka, **2** (1939), 6–8, Nachdruck: Eureka, **27** (1964), S. 9–11. Neben Lasker hatte auch Michael Goldberg Teillösungen ersonnen. Siehe W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreations and essays*, London [11]1939, S. 39 f.

Spieler verliert, der keinen Zug mehr machen kann. Außerdem bestehen bei vielen dieser Varianten die Stellungen aus nebeneinanderliegenden Haufen von Steinen, wobei ein Zug jeweils nur einen Haufen betrifft und die anderen Haufen nicht verändert Diese Eigenschaft lässt sich generalisieren, wozu man eine „Addition“ von Stellungen dadurch definiert, dass man die zu addierenden Stellungen nebeneinanderlegt und in der Spielregel vorgibt, dass ein Zug in genau einer dieser Komponenten gezogen werden muss. In diesem Sinn ergibt sich jede Stellung des klassischen Nim als „Summe“ von Stellungen, die jeweils nur aus einem Haufen bestehen.

Bei jedem der von Sprague und Grundy untersuchten Spiele zerlegt sich die Gesamtheit aller Stellungen wie beim normalen Nim in Verlust- und Gewinnstellungen,[90] wobei sich die Bezeichnung wieder an der Perspektive des am Zug befindlichen Spielers orientiert. Diese Tatsache war bereits von Lasker formuliert worden und Sprague verweist in seiner diesbezüglichen Darlegung auf Laskers Buch. Lasker war aber noch weitergekommen:[91] Er hatte nämlich bereits formuliert, welche Eigenschaften das Zusammenlegen von zwei Stellungen hat: „Zwei Verluststellungen aneinandergefügt, ergeben eine neue. Das läßt sich ohne weiteres einsehen, denn der Nachziehende kann jeden Zug des Anziehenden so beantworten, als wäre die nichtgespielte Verluststellung gar nicht vorhanden, und muß auf diese Art zuletzt den Tisch leeren, also gewinnen … Wiederum eine Verluststellung an eine Gewinnstellung gefügt, ergibt eine Gewinnstellung, weil ja der Zug, der die ursprüngliche Gewinnstellung in eine Verluststellung verwandelt, auch die erweiterte Stellung in eine Verluststellung verwandelt.“[92]

Lasker erläutert die Zweckmäßigkeit dieser Regeln am Beispiel der heute nach ihm benannten Nim-Variante, für die er eine Tabelle von aus drei Haufen bestehenden Verluststellungen herleitet. Im Hinblick auf eine allgemein gültige Gesetzmäßigkeit merkt er allerdings an, dass er „[d]as Gesetz der Verluststellungen …nicht gefunden“ habe.[93] In Bezug auf prinzipielle Eigenschaften für „derlei Spiele“, die „dem ‚Nimm‘ eng verwandt sind,“ ergänzt er: „Zunächst findet sich, daß zwei Gruppen von Haufen ‚äquivalent‘ sein können, indem in jeder Verluststellung, wo die Gruppe vorkommt, diese durch die andere ersetzt werden kann, ohne daß der Charakter der Stellung aufgehoben würden. Zwei äquivalente Gruppen zueinander gelegt, erzeugen eine Verluststellung. Sodann kann man fragen, welche Haufen äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind. Dabei findet sich, daß gewisse Haufen nicht äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind.“[94]

Dass zwei äquivalente Gruppen von Haufen zueinander gelegt eine Verluststellung ergeben, wird von Lasker nicht näher erläutert. Der fast offensichtliche Grund für diese Eigenschaft ist, dass in dieser Nebeneinanderlegung eine der beiden Gruppen durch die andere ausgetauscht werden kann, ohne dass sich der Charakter der Stellung verändert. Die mit dem Austauschen entstehende Stellung, die aus zwei identischen Gruppen von Haufen besteht, ist aber, wie Lasker zuvor feststellt hat, eine Verluststellung,[95] da der

---

[90] Damit scheint für Lasker die Aussage von Zermelos Satz zumindest für diese Klasse von neutralen Spielen, die nicht remis enden können, selbstverständlich gewesen zu sein.
[91] Erstmals erläutert in Bewersdorff (Fn 7), S. 174–183.
[92] Lasker (Fn 70), S. 183.
[93] Lasker (Fn 70), S. 186.
[94] Lasker (Fn 70), S. 186.
[95] Lasker (Fn 70), S. 186.

nachziehende Spieler einfach die Züge des Anziehenden jeweils in der anderen Gruppe von Haufen kopieren kann.

Lasker sucht nun zu verschiedenen Nim-Regeln die Haufen, die „nicht äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind.“[96] Lasker erläutert, dass diese von ihm *prim* [97] genannten Haufen beim normalen Nim gerade die Haufen sind, deren Größe einer Zweierpotenz entspricht. Bei der heute nach ihm benannten Nim-Version stellen sich hingegen die Haufen mit den Größen 1, 2, 3, 7, 15, 31, … als prim heraus, wobei „[v]on der 3 an … jeder Haufe dieser Art eine Potenz von 2 verringert um 1 [ist]. Jeder beliebige Haufe ist entweder äquivalent einem dieser Haufen oder äquivalent einer Gruppe dieser Haufen.“[98]

Bei der Vorgehensweise und den gewählten Bezeichnungen merkt man deutlich Laskers Erfahrung als Algebraiker. Natürlich ist Laskers populärwissenschaftiches Spielebuch nicht der geeignete Ort für mathematisch-formale Darlegungen. Insofern sind die von Lasker vorgeführten Beispiele der praktisch geführte Nachweis, dass sein Ansatz, den er selbst für unvollständig hält, die Analyse von Nim-Varianten komplexitätsmäßig erheblich vereinfacht, wenn auch nicht in der maximal möglichen Weise.

Anzumerken ist aber, dass Lasker bereits wesentliche Elemente der später von Sprague und Grundy entwickelten Theorie angerissen hat, wobei sogar ein deutlicher Einfluss auf Spragues bereits erwähnte Arbeit unübersehbar ist. Sprague beginnt seine systematische Untersuchung mit der heute als Summe bezeichneten Operation des Nebeneinanderlegens von Stellungen, wobei der ziehende Spieler jeweils genau einen Summanden aussuchen muss, um dann dort lokal einen erlaubten Zug auszuführen. Wie schon Lasker erläutert Sprague, dass die Summe von Verluststellungen eine Verluststellung ergibt und die Summe von Verluststellungen mit einer einzigen Gewinnstellung eine Gewinnstellung ergibt. Der Fall einer Summe, bei der mindestens zwei Summanden Gewinnstellungen sind, bedarf aber einer tiefergehenden Analyse. Dazu verwendet auch Sprague eine Äquivalenz von Stellungen, allerdings in Form einer Äquivalenz von Stellungen der zu untersuchenden Nim-Variante zu Stellungen des normalen Nim. In letzter Konsequenz kann bei diesem Vorgang sogar immer eine nur aus einem Haufen bestehende Stellung des normalen Nim erreicht werden. Deren Größe wird heute als *Grundy-Zahl* oder auch *Sprague-Grundy-Zahl* der ursprünglichen Stellung bezeichnet. Um eine Nim-Variante zu analysieren, reicht es völlig aus, nur deren aus einem Haufen bestehende Stellungen zu untersuchen. Ist dies geschehen, können alle Stellungen dieser Nim-Variante zu äquivalenten Stellungen des normalen Nim transformiert werden. Auf diese Weise überträgt sich die Gewinnstrategie des normalen Nim-Spiels auf alle anderen Nim-Varianten. Dort ist eine Stellung genau dann eine Verluststellung, wenn die übertragslose „Summe“ der binär dargestellten Grundy-Zahlen der einzelnen Haufen gleich 0 ist. Haufen, die Lasker in seiner Nim-Variante als prim erkannt hat, sind genau diejenigen Haufen, die als Grundy-Zahl eine Zweierpotenz besitzen. Laskers Analyse ist daher zum Sprague-Grundy-Ansatz äquivalent, wobei Lasker allerdings eine effektive Methode zur Bestimmung der primen Haufen fehlt.

Die beiden Äquivalenzrelationen, die Lasker und Sprague betrachtet haben, lassen sich übrigens als Einschränkungen einer einzigen Äquivalenzrelation

[96] Lasker (Fn 70), S. 186.
[97] Lasker (Fn 70), S. 187.
[98] Lasker (Fn 70), S. 187.

auffassen, die für alle neutralen und sogar nicht neutralen Spiele, bei denen der zuletzt ziehende Spieler gewinnt, definiert werden kann. In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass ein Pendant zum Lasker'schen Äquivalenzbegriff, der sich nur auf Summationen mit Stellungen der aktuell zu untersuchenden Nim-Variante bezieht, 1984 von Dean Allemang bei neutralen Spielen, bei denen der zuletzt ziehende Spieler *verliert*, erfolgreich eingesetzt wurde.[99] Allemangs Kunstgriff war notwendig, weil die Analyse von Spielen dieser Klasse von Spielen mit dem universellen Äquivalenzbegriff nicht genügend vereinfacht werden kann.

Lasker über Mehrpersonenspiele

Im eingangs gegebenen Kurzüberblick über die Grundzüge der Spieltheorie wurde bereits darauf hingewiesen, dass Spiele für drei oder mehr Personen deutlich weniger bestimmt sind als die hier erörterten Karten- und Brettspiele für zwei Personen. Grund ist, dass ein einzelner Spieler im Regelfall seinen Gewinn auf gesicherte Weise nur wenig beeinflussen kann. Diese Eigenschaft von Mehrpersonenspielen wird auch von Lasker an verschiedenen Stellen seiner Bücher herausgearbeitet, wobei der Fokus seiner Überlegungen spielerischen Aspekten gewidmet ist.

Für das Baccarat mit mehr als zwei Spielern merkt Lasker an, dass „ein Spieler, der nach richtiger Strategie vorgeht, dadurch in Mitleidenschaft gezogen werden kann, daß ein anderer einen Fehler macht … Aber bei ehrlichem Spiel würde der Fehler, sofern die Partie oft wiederholt wird, sich nur bei dem rächen, der ihn begeht".[100] Aufgrund des letzten Satzes könnte man spekulieren, in Laskers „ehrlichem Spiel" ein Nash-Gleichgewicht zu sehen. Allerdings unterliegen solche Interpretationsansätze der Gefahr, aus dem Blickwinkel des heutigen Erkenntnisstandes mittels geeignet ausgewählter Passagen zu viel in einem Text erkennen zu wollen.

Beim Pokerett zu mehreren Personen macht Lasker darauf aufmerksam, dass ein „Vorbehalt" des „Eigennutzes" zu machen sei, denn ein solches Spiel setze „unumgänglich voraus, daß jede Person nur ihre eigenen Interessen, niemals die eines anderen absichtlich wahrnimmt. Das Motiv jeden Spielers muß in letzter Instanz der eigene Nutzen sein. Wenn mein Mitspieler verliert, damit ich verliere, so verletzt er das Ethos des Spiels, auch wenn er mit dem Gewinner nicht in Kollusion steht. Sein Streben muß und soll sein, so wenig als möglich zu verlieren, so viel als möglich zu gewinnen, alles andere muß und soll ihm Hekuba[101] sein, die Ehrlichkeit des Spiels selbstverständlich angenommen. Daß bei einem solchen Spiel von mehr als zu zweit ein Spieler unter den Fehlern eines anderen zu leiden haben mag, ist ein Mangel solcher Spiele."[102]

Zwar stellt Lasker auch noch mathematische Überlegungen zum Pokerett für mehrere Personen an. Aus spieltheoretischer Sicht sind diese allerdings

[99] Dean T. Allemang, *Generalized genus sequences for misère octal games*, International Journal of Game Theory, **30** (2001), S. 539–556. Inhaltlich folgen die dort präsentierten Ergebnisse Allemangs Master-Arbeit aus dem Jahr 1984.
[100] Lasker (Fn 37), S. 42.
[101] Im Sinne von *gleichgültig*, auf Shakespeares Hamlet zurückgehend.
[102] Lasker (Fn 37), S. 174.

noch lückenhafter als im Fall von zwei Mitspielern. Vollständiger ist dagegen Laskers Analyse von Nim-Varianten für drei Personen.[103]

Lasker analysiert zunächst ein ganz einfaches Nim, das nur mit einem einzigen Haufen von Steinen gespielt wird. Die Spieler ziehen reihum und nehmen dabei zwischen ein bis fünf Steine vom Haufen. Es gewinnt derjenige Spieler, der den letzten Zug macht, eine Einheit und zwar von demjenigen Spieler, der als Vorletzter gezogen hat. Der dritte Spieler, der als nächster am Zug wäre, gewinnt nichts, verliert aber auch nichts – Lasker nennt dies *schlicht* machen.

Beginnend mit Stellungen kurz vor Ende des Spiels und dann weiter entgegen der Spielchronologie erhält Lasker eine Zerlegung der Stellungen in drei Teilmengen, nämlich in

- die Verluststellungen 6, 13, 20, …,
- die Gewinnstellungen 1 bis 5, 8 bis 12, 15 bis 19, … und
- die Schlichtstellungen 0, 7, 14, …

Die Benennungen der drei Teilmengen beziehen sich jeweils auf das Resultat, das der Anziehende erzielt, wenn jeder der Spieler im weiteren Verlauf der Partie seinen eigenen Interessen gemäß agiert. Lasker bemerkt aber, dass anders als im Fall von zwei Mitspielern der in einer Gewinnstellung anziehende Spieler seinen Sieg nicht sicher hat. Zwar ist es für einen Spieler A ausgehend von einem Haufen mit zwölf Steinen völlig richtig, fünf Steine zu nehmen, um so den nächsten Spieler B in einer Schlichtstellung ziehen zu lassen. Der Sieg des Spielers A, der zuerst gezogen hat, ist aber nur dann sicher, wenn der nachfolgend ziehende Spieler B wirklich seinen eigenen Interessen folgt und dazu nur einen einzigen Stein nimmt: „Ist B aber ehrgeizig und durchschaut er nicht die Zusammenhänge, so wird er von dieser strengen Taktik abweichen, und dann wird A seines Gewinnes verlustig gehen. Dies scheint ungerecht, indessen ist ein Ausgleich vorhanden. B kann nämlich diesen Umschwung zuungunsten von A nicht herbeiführen, ohne Gefahr zu laufen, daß er selbst leidet, da es dann in der Hand von C gegeben ist, den Gewinn zu erzwingen und B zum Verlust zu drängen. Nimmt nämlich B mehr als eine Erbse, so wird C nun die Gewinnposition erhalten und bei richtigem Spiel A eine Schlichtstellung übergeben. Nur wenn C unverständig genug ist, sich statt der Gewinnstellung einer Schlichtstellung zu versichern, wird A Verlierer und B Gewinner. A gewinnt demnach, wofern nicht B seinem eigenen Interesse entgegen handelt, und er verliert auch dann nicht, wenn nicht zudem C denselben Fehler begeht. Wenn freilich B und C jeder einmal im Spiel solchen Fehler begehen, um nachher das Spiel fehlerlos zu Ende zu führen, so ist A verloren.“[104]

Was Lasker beschreibt, sind nichts anderes als solche Strategien der drei Spieler, die sich zu einem Gleichgewicht kombinieren. Wie im anfänglichen Überblick dargelegt ist die Existenz eines derartigen Gleichgewichtes in reinen Strategien garantiert, da es sich um ein Spiel mit perfekter Information handelt. Weil die Strategie des verlierenden Spielers nicht eindeutig ist, handelt es sich übrigens nicht nur um ein einzelnes Gleichgewicht. Allerdings sind bei dem untersuchten Spiel die Spielresultate der verschiedenen Gleichgewichte alle untereinander identisch.

Klar dargelegt wird von Lasker auch die im Vergleich zu Zwei-Personen-Spielen deutlich eingeschränkte Stabilität solcher Gleichgewichte. Vor

[103] Erstmals erläutert in Bewersdorff (Fn 7), S. 162–168.
[104] Lasker (Fn 70), S. 192.

Nashs Dissertation sind Laskers Ausführungen wohl die deutlichste Beschreibung der Eigenschaften eines Gleichgewichts.

Laskers Wirkung auf die weitere Entwicklung

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass Spragues Nim-Untersuchung Laskers Buch *Brettspiele der Völker* als Ausgangspunkt hatte. Lasker selbst hatte eine solche Wirkung erhofft. Demnach würde die „Theorie der mathematischen Kampfspiele … eines Tages dem zweckmäßigen Handeln ihre Dienste“ anbieten dürfen. Er hebt dabei die Bedeutung des „Prinzip[s] der Zwischenziele in Verbindung mit dem der mathematischen Induktion“ hervor, das er an seinen Beispielen erhellt habe. Lasker sieht es ausdrücklich nicht als Mangel an, dass „unendlich viel noch zu tun und zu entdecken bleibt“, da der Einsichtige „gutgelaunt die bescheidene Arbeit, zu dem seine Kraft ausreicht“, vollführt, „die erst der zukünftigen Generation ihre Frucht schenken“ wird.[105] Allerdings hat sich Laskers Hoffnung nur partiell erfüllt, da seine beiden Spielebücher in der mathematischen Fachwelt, abgesehen von den wenigen, hier bereits erwähnten Ausnahmen, weitgehend unbeachtet blieben.

Am Rande anzumerken bleibt noch, dass Laskers Buch *Das verständige Kartenspiel* in einem Urteil des deutschen Bundesverwaltungsgerichts aus dem Jahr 1955 referiert wird. Der Kläger hatte in dem Verfahren unter Berufung auf Laskers Buch angeführt, dass das von ihm veranstaltete Kartenspiel ein Geschicklichkeitsspiel sei, da es dem Spieler möglich sei, seine Strategie wie von Lasker im Buch beschrieben zu optimieren. Allerdings befand das Gericht, dass „[m]athematische Kalkulationen und verwickelte Wahrscheinlichkeitsberechnungen, wie sie in dem vom Kläger angeführten Buch von Dr. Lasker ‚Das verständige Kartenspiel‘ aufgestellt worden sind, … für die Entscheidung des Rechtsstreits ausscheiden [müssen]. Für die Beurteilung, ob ein Spiel den Charakter eines Glücksspiels besitzt, ist die durchschnittliche Fähigkeit der beteiligten Personen maßgebend.“[106]

Resümee

Obwohl hier längst nicht alle mathematischen Erwägungen referiert werden konnten, die Lasker in seinen Spielebüchern darlegt hat, so dürfte doch Laskers Erkenntnisstand über spieltheoretische Sachverhalte deutlich geworden sein. Das Ergebnis lautet, dass Lasker die zu seiner Zeit entstehenden Ideen der Spieltheorie nicht oder nur vage gekannt haben dürfte. Seine Analysen besitzen damit einen eigenständigen Charakter, wobei punktuell einzelne Aspekte der Spieltheorie, nicht aber systematische spieltheoretische Ansätze enthalten sind.[107] Die letztgenannte Einschränkung resultiert nicht nur aus der Darstellungsform, die Lasker auf das Publikum seiner populärwissenschaftlichen Bücher ausrichten musste, sondern zeigt sich auch

[105] Lasker (Fn 70), S. 203.

[106] Bundesverwaltungsgericht, Urteil vom 17.5.1955, Aktenzeichen 1 C 133.53. Zur Thematik siehe Jörg Bewersdorff, *Spiele zwischen Glück und Geschick*, Zeitschrift für Wett- und Glücksspielrecht, **12** (2017), S. 228–234.

[107] Im Vergleich zu Klaus (Fn 5) und Leonard (Fn 31) mag diese Wertung überraschen, hingegen ist sie konform zu Wertungen von Laskers philosophischen Werken, etwa durch Ernst Cassirer. Siehe Eduard Lasker, *Chess secrets*, S. 27 ff. und Nachtrag zu Gräfrath (Fn 1), S. 251.

in der deutlichen inhaltlichen Distanz zwischen den Aussagen Laskers einerseits und denen Borels und von Neumanns andererseits. Gleichwohl gehören die 1929 und 1931 erschienenen Bücher Laskers *Das verständige Kartenspiel*, *Encyclopedia of Games, Volume I, Card Strategy* und *Brettspiele der Völker* zu frühen Zeugnissen spieltheoretischer Überlegungen. Aufgrund ihrer geringen Wirkung ist ihre fehlende Berücksichtigung in Darstellungen der Geschichte der Spieltheorie und ihrer Vorstufen[108] zwar verständlich, aber trotzdem mehr als bedauerlich.

Roland Sprague

Roland Sprague (* 11. Juli 1894 in Unterliederbach; † 1. August 1967) studierte ab 1912 in Berlin und Göttingen, unterbrochen durch den Militärdienst im Ersten Weltkrieg. Lasker sah in Sprague seinen Schüler, wie eine Buchwidmung aus dem Jahr 1916 zeigt. Ab 1922 unterrichte Sprague als Gymnasiallehrer für Mathematik, Chemie und Physik in Berlin. Sprague, dessen Großväter Hermann Amandus Schwarz und Thomas Bond Sprague wie auch sein Urgroßvater Ernst Eduard Kummer Mathematiker waren, promovierte 1950 in Mathematik. 1955 wurde er Professor an der Pädagogischen Hochschule Berlin.

Georg Klaus

Georg Klaus (* 28. Dezember 1912 in Nürnberg; † 29. Juli 1974 in Ost-Berlin) wurde als Kommunist im Dritten Reich fünf Jahre inhaftiert und konnte daher sein 1932 begonnenes Studium nicht abschließen. Nach dem Zweiten Weltkrieg, in dem er an der Ostfront schwer verwundet wurde, begann Klaus eine Parteikarriere in der SED. Das wieder aufgenommene Studium beschloss er 1948 mit einer Promotion in Philosophie. Nach seiner Habilitation wurde Klaus 1950 Professor und bekleidete ab 1959 einen Lehrstuhl an der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Ost-Berlin, wobei sein Fokus auf den Beziehungen zwischen Philosophie und mathematisch orientierten Wissenschaften wie Logik, Kybernetik und Spieltheorie lag.

Klaus, der schon 1929 einem Arbeiterschachklub angehörte, erreichte 1942 bei der Großdeutschen Meisterschaft in Bad Oeynhausen den geteilten zweiten Platz. 1953/54 war er Präsident der Sektion Schach der DDR.

Wilhelm Ahrens

Wilhelm Ahrens (* 3. März 1872 in Lübz; † 23. Mai 1927 in Rostock) promovierte in Rostock 1895 in Mathematik. Nach einigen Jahren als Lehrer, während denen er 1897 nochmals ein Studiensemester bei Sophus Lie in Leipzig absolvierte, betätigte sich Ahrens ab 1904 hauptberuflich als Wissenschaftspublizist. Themen seiner Bücher und seiner sonstigen Veröffentlichungen sind die Unterhaltungsmathematik sowie die Geschichte der Mathematik.

[108] Während Leonard (Fn 31) ausschließlich die philosophischen Bücher Laskers würdigt, bleibt Lasker in den anderen Darlegungen der Geschichte der Spieltheorie unerwähnt: N. N. Worobjow, *Die Entwicklung der Spieltheorie*, Berlin (-Ost) 1975 (russ. Orig. 1973). E. Roy Weintraub (ed.), *Toward a history of game theory*, Durham 1992. Norfleet W. Rives, *On the history of the mathematical theory of games*, History of Political Economy, **7** (1975), S. 549–656. Robert W. Dimand, Mary Ann Dimand, *The history of game theory*, Volume 1: *From the beginnings to 1945*, London 1996. Mary Ann Dimand, Robert W. Dimand, *The foundations of game theory*, Cheltenham 1997, 3 Bände (Sammlung mit Quellen).